920. 圓體ヲ表現スル行列 I

武隈　良一（小樽）

円体ヲ行列ニヨッテ表現スルコトハ既ニ試ミラレテ居ルト思ヒマスガソレニ對スル文献ヲ知ラスノデ（アリマスレバ御教示下サイ）以下ノ如ク考ヘテ見マシタ。不完全ナ点ニ對スル御叱正トコレニ関スル御蘊蓄ヲ御洩ラシ下サルコトヲ御願ヒ致シマス。

今nヲ奇素数トシ

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1=0$$

ノ根ヲ$\zeta,\ \zeta^2,\ \cdots\cdots\ \zeta^{n-1}$

Γヲ有理数体トスルトキ$\Gamma(\zeta)$ヲ表現スルコトヲ考ヘテ行キマス。即チ奇素数円分体丈ヲ考究ノ範囲ニオキマス。先ヅ次ノn次平方行列

$$\xi_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\cdots\cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \xi_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\cdots\cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0\cdots\cdots 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\cdots\cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0\cdots\cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\cdots\cdots 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\xi_{n-2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_{n-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ヲ底トスル行列

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots\cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots\cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots\cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

ノ集合ヲ $\mathfrak{M}_n$ ヲ考へ，Aヲ簡單ノタメ (a_i) ト略記シマス。

サテ $\Gamma(\zeta)$ ニ屬スル任意ノ數ハ

$$a_1 + a_2\zeta + \cdots\cdots + a_n\zeta^{n-1} \qquad \text{(A)}$$

（茲ニ a_i ハ有理數）

ト表ハサレ $\mathfrak{M}_n$ ニ屬スル任意ノ行列ハ

$$a_1\xi_0 + a_2\xi_1 + \cdots\cdots + a_n\xi_{n-1} \qquad \text{(B)}$$

ト表ハサレルノデ (A) ヲ (B) ヲ用ヒテ表現シテ見ヤウトスルガ小論ノ發端デアリマス。

$A=(a_i)$ ニ於ケル元 a_i ヲスベテ有理數トスルトキ明ラカニ　(A) $\longrightarrow$ (B)

ナル對應ハ考ヘラレマスガ，コノ逆ハ直チニ行キマセン。ソコデ逆ノ對應ヲツケルタメニ $\mathfrak{M}_n$ ニ相等ノ定義ヲ下シソレニ

ヨリ相等シイモノヲ一類ノ集團ニシテオキ，$\mathfrak{M}$ニ於ケル類ニ$\Gamma(\mathfrak{h})$ノ一數ヲ對應サセルコトニシマス。

定義1．（$\mathfrak{M}_n$ニ於ケル相等）

二ツノ行列 $A=(a_i)$，$B=(b_i)$ ニ於テ

$$a_i-a_j=b_i-b_j \qquad (i,j=1,2,\cdots\cdots n)$$

ナルトキ而テコノ時ニ限リ $A=B$ トス。

ex. $\mathfrak{M}_3$ ニ於テ

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 8 & 1 & 4 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 \\ 10 & 3 & 6 \\ 6 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

定理1．相等ノ定義ハ反射律，對稱律，推移律ヲ滿足ス。

証明 ‥‥‥略

上ノ相等ノ定義ニヨリ $\mathfrak{M}_n$ ニ於ケル相等シキモノヲ一類ニ集メ，斯ル類ノ集合ヲ M_n トシマス。

定理2．$M_n \ni A$ トスルトキ

$$A+X=A$$

ヲ滿足スル X ハ M_n ノ中ニ必ズ唯一個アリ。

証明（定義1ニヨル）

定義2．定理2ニ於ケル X ヲ M_n ニ於ケル 0 トイフ。コノ定義ニヨレバ M_n ニ於ケル 0 ハ勿論零行列ヲ含ンデ居リマスガ其他ニハ一般ニ $X=(x_i)$ ニ於テ

$$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n$$

ナル形ヲシテオリマス。

ソレ故 $A=(a_i)$ ノスベテノ元ニ同一ノ数ヲ加減シテモAノ属スル類ニハ変リハアリマセンノデ、類ヲ代表スル行列ノスベテノ元ガ正ノ有理数（又ハ0）トシテ一般性ヲ失ヒマセン. 今後 $a_i \geqq 0$ トシマス。（即チ一ツデモ負ニナルモノガアッタラ適當ナ正数ヲ加ヘテ正ニ直スコトニシマス）

以上ニヨリ $\Gamma(\text{ち})$ ノ一数ト M_n ノ一類トヲ一對一ニ對應サセルコトガ出来マス。

ex. 三次円体ニ於テ

$$2+\text{ち}-3\text{ち}^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\because \quad 2+\text{ち}-3\text{ち}^2 = 2+\text{ち}-3\text{ち}^2+3(1+\text{ち}+\text{ち}^2)$$
$$= 5+4\text{ち}$$

コノ例ニ於テ見ラルヽ如ク a_i ノ中一ツハ必ズ0ニスルコトガ出来ルノデ —— $1+\text{ち}+\text{ち}^2+\cdots\cdots+\text{ち}^{n-1}=0$ ヲ用ヒマスカラ —— 今後ハ a_{n-1} 式ガ0トシテモ一般性ヲ失ヒマセン。

定理3. $A \neq 0$ ナラバ $|A| \neq 0$ ナリ。

証明. $|A|$ ハ循環行列式ナル故。

コレニヨリ次ノ定理ガ成立シマス。

定理4. M_n ハ Körper ヲナス。

証明. 長クナルノデ省ク。

M_n ニ於ケル零ハ既ニ説明シマシタガ Einheit 即チ $A\cdot X=A$

ナルXハ ξ_0 デアリマス。

定義3.

$$(a_i) = a_1\xi_0 + a_2\xi_1 + \cdots\cdots + a_n\xi_{n-1}$$

ト表ハシタトキ

ξ_0 ヲ主單位

ξ_1 ξ_2 ……ξ_{n-1} ヲ副單位

トイヒ両者ヲ総稱シタトキ單位トイフ。

定理5. 單位ニ關シテハ次ノ乘積表ガ成立ス。

	ξ_0	ξ_1	……	ξ_{n-1}
ξ_0	ξ_0	ξ_1	……	ξ_{n-1}
ξ_1	ξ_1	ξ_2	……	ξ_0
⋮				
ξ_{n-1}	ξ_{n-1}	ξ_0	……	ξ_{n-2}

證明　略ス。

以上ヲ以テ序論ヲ終ヘ續論ハ次ノ機會ニ發表シタイト思ヒマス。コノ小論ノ究極ノ目的ハ *Fermat* 方程式

$$X^n + Y^n + Z^n = 0$$

ガ M_n ニ於ケル行列ニヨル解ヲ有セヌトイフコトヲ證サントスルニアリマス。（續ク）