917. Vector-lattice ノ表現ニ就テ

中野　秀五郎（東大）

此ノ前ノ紙上談話會デ吉田氏ガ「単位ヲ有スル Vector lattice ニ就イテ」ナル表題ニテ、或ル種ノ Vector-lattice ノ contin functions ニテノ表現ヲ與ヘタ。其ノ際吉田氏ハ Boolian algebra ノ表現ト同ジヤウナ方法ト述ベラレタガ実際ニ Wallman ノ Boolian algebra ノ表現ト Riesz ノ linear functional ノ Spectralization ノ方法トヲ用フレバ、ヤハリ同様ノ結果ガ得ラレル。

吉田氏ハ "unit" ノ存在ヲ假定セラレタガ、此ノ場合ハ私ガ吉田氏ニ手紙デ注意致シマシタ様ニ私ノ Dilatator（學士院 XVI. 1940）ヲ用ヒマスト直チニ Gelfand ノ normed ring ヨリ得ラレルノデアリマス。従ッテ此処デハモット一般ニ unit ノナイ場合ヲ考ヘマス。

Vector-lattice $\mathfrak{M}$ トシテハ、次ノ性質ヲ有スル實數体ヲ operator トスル。semi-ordered Modul トシマス。

(1) $a > b$ & $b > c \longrightarrow a > c$

(2) $a \not> a$

(3) $a \frown b$, $a \smile b$ ノ存在

(4) $a > b \longrightarrow a + c > b + c$

(5)　$a > 0$ & $\alpha > 0$ （α ハ實數）$\longrightarrow \alpha a > 0$

(6)　$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots \geqq 0 \longrightarrow$ g. l. b. a_n ノ存在。

此處ニ(6)番目ハ非常ニ強イ條件ノヤウニ思ハレマスが(6)ノ代ハリニ

Archimedes ノ公理　$a > 0 \rightarrow \underset{n=1,2,\cdots}{\text{g.l.b.}} \frac{1}{n} a = 0$

ヲ置ケバ(6)ナル性質ヲ有スル Vector-lattice $\overline{\mathfrak{M}}$ マデ $\mathfrak{M}$ ヲ拡張シ、然カモ $x \in \overline{\mathfrak{M}}$ ニ對シ、$a_1 > a_2 > \cdots\cdots$, g. l. b $a_n = x$, $a_n \in \mathfrak{M}$ ナラシメ得ルヲ以テ，最初カラ(6)が存在スルモノトス。吉田氏ノ場合ニモ Archimedes ニ相當スル假定、例ヘバ unit I ノ存在スルトキハ $\underset{n}{\text{g.l.b}} \frac{1}{n} I = 0$ ヲ假定シナケレバ恐ラク間違ヒノヤウニ思ハレル。

$\mathfrak{M}$ ニツイテ(1)—(6)ヨリ得ラレル elementary ナ性質ニツイテハ省略スルモノトス。此處デハ特ニ $\mathfrak{M}$ ニ於ケル Projection（私ノ學士院 XVI. 1940, Teilweise geordnete Algebra）ヲ用フル。

$\mathfrak{M} \ni a$ ニ對シ常ニ $\mathfrak{M}$ ニ於ケル positive linear operator トシテ Projection が存在シ次ノ性質ヲ有スル。

$[a][b] = [b][a] = [[a]b] = [[b]a] = [|a| \frown |b|]$;

$([a]b\pm) = ([a]b)\pm$;　　$[a][a] = [a]$;

$[a] = [|a|]$; $[a] = [\alpha a]$　（$\alpha \neq 0$ ナル實數）;

$[a] = 0 \rightleftarrows a = 0$;　$[a][b] = 0 \rightleftarrows |a| \frown |b| = 0$;

$[a][b] = [a] \rightleftarrows [b] \geqq [a]$;

$[a][b] = 0 \rightarrow [a+b] = [a] + [b].$

$[a] \geqq [b] \rightarrow [a] - [b]$ モ Projection ニシテ、

$\{[a]-[b]\}[b] = 0$ & $[a]-[b] = [a - [b]a]$;

$|a_1| \leqq |a_2| \leqq \cdots\cdots$ & $\text{l.u.b}\, |a_n| = |a| \rightarrow \lim_{n\to\infty} [a_n]$

$= [a]$ & $[|a_1|] \leqq [|a_2|] \leqq \cdots\cdots$

然シ Identity operator I ハ必ズシモ Projection ナラズ。故ニ

Projections ハ $[a] \frown [b] = [a][b]$, $[a] \smile [b] = [|a| \smile |b|]$ ニ對シテ distributive lattice ヲナスガ complemented 即チ Boolian Algebra デハナイ。此ノ度ノ Annals デ Bochner ト Phillips ガ定義シタ Projection ハ此ノ Projections ニ I ヲ加ヘテ作ッタ Boolian Algebra ノ Operators トナリ此処ノ Projections ヲ principal Projections ト云ッテキルガ此処デハ從ッテ principal Projections ノミヲ考ヘル。

I. Maximal Ideal of Projections.

Wallman ト同様ニシテ Projection ノ Ideal ヲ次ノ如クニ定義ス。Projection ノ集合 $\mathfrak{P}$ ガ次ノ如キ性質ヲ有スル時 Ideal ト云フ.

1°. $\mathfrak{P} \ni 0$

2°. $\mathfrak{P} \ni [a]$ & $[a] \leqq [b] \rightarrow \mathfrak{P} \ni [b]$

3°. $\mathfrak{P} \ni [a], [b] \rightarrow \mathfrak{P} \ni [a][b]$

特ニ Maximal Ideal (即チ $\mathfrak{P} \ni [a]$ ナラバ $\mathfrak{P} \ni [b]$,

$[a][b]=0$ ナル $[b]$ ガ存在スル）ノミヲ考ヘルヲモッテ今後ハ Maximal Ideal ヲ M.I ト記スコトゝスル。

[定理1] 任意ノ Ideal $\mathfrak{a}$ ニ對シ，$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}$ ナル M.I. $\mathfrak{p}$ ガ存在スル。

（證明）ハ Wallman ト同様 transfinite inductions ニヨリ $\mathfrak{a}=0$ ナラザル Projections ヲ順次ツケ加ヘテ Ideal ヲ作リ maximal ニスレバ可ナリ。

[定理2] M.I. $\mathfrak{p}$ ニ對シテ $[a]\in\mathfrak{p}$, $[a]=[a_1]+[a_2]$, $[a_1][a_2]=0$ ナラバ $[a_1],[a_2]$ ノ何レカ一方ガ $\mathfrak{p}$ ニ屬シ．他方ガ屬サヌ。

（證明）$\mathfrak{p}\ni 0$ ニヨリ $[a_1],[a_2]$ ハ共ニ $\mathfrak{p}$ ニ屬サヌ。若シ $[a_1]\in\mathfrak{p}$ トスレバ $[a_1][p]=0$, $[p]\in\mathfrak{p}$ ナル p ガ存在ス。故ニ $[a][p]\in\mathfrak{p}$. 然ルニ $[a_2]\{[a][p]\}=\{[a]-[a_1]\}[a][p]=[a][p]$. 即チ $[a_2]\geqq[a][p]$. 故ニ $[a_2]\in\mathfrak{p}$.

次ニ M.I. 全体ノ集合ニ次ノ如ク Topoloy ヲ入レル。（此処デハ Wallman ト反對ニ Umgebung ヲ與ヘル）。

M.I. $\mathfrak{p}$ ニ對シ、$[a]\in\mathfrak{p}$ ナル $[a]$ ニ對シテ $[a]\in\mathfrak{z}$ ナル M.I. $\mathfrak{z}$ ノ全体（コレヲ $[a]$ デ表ハスコトゝスル）ヲ $\mathfrak{p}$ ノ Umgebung ト定義シ、$\mathfrak{p}$ ノ空間ヲ $\mathfrak{R}$ デ表ハスコトゝスル。（$\mathfrak{z}$ ノ二ツノ Umgebung $[a],[b]$ ニ對シテ丁度 $[a][b]$ ガ其ノ Durchschnitt ナルコトハ Ideal ノ Def. ヨリ明カデアル）

[定理3] $\mathfrak{R}$ ハ Hausdorff space ニシテ、且ツ

任意ノ Umgebung $[a]$ ハ又 closed ニシテ且ツ bicompact ナリ。

（証明） $\mathfrak{R} \ni \mathfrak{p}, \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{a}$ トス。然ルトキハ

$$\mathfrak{p} \ni [a], \quad \mathfrak{a} \not\ni [a]$$

ナル Projection $[a]$ ガ存在ス。又 $\mathfrak{a} \not\ni [a]$ ナルニヨリ $\mathfrak{a} \ni [b]$, $[a][b] = 0$ ナル Projection $[b]$ ガ存在ス。故ニ $[a]$, $[b]$ ハ夫々 $\mathfrak{p}, \mathfrak{a}$ ノ Umgebung ニシテ共有点ナシ即チ $\mathfrak{R}$ ハ Housdorff space ナリ。

$[a]$ ヲ一ツノ Umgebung トシテ $[a]$ ガ $\{[b_\alpha]\}_\alpha$ ナル Umgebung ノ System ニテ cover サレタトスル。然ルトキハ $\{[a]-[a][b_\alpha]\}_\alpha$ ナル Umgebung ノ Durchschnitt ハ空集合ナリ。若シ b_i $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ ノ有限個ニ對シ $[a]-[a][b_i]$ ノ Durchschnitt ガ空集合ナラズ、即チ

$$\prod_{i=1}^{n}\{[a]-[a][b_i]\} \neq 0$$

トスレバ、從テ $\prod_{i=1}^{n}\{[a]-[a][b_i]\}$, ナラビニ此レヨリ大ナル Projection ハ Ideal ヲナス。此ノ Ideal ヲ含ム M.I. ヲ $\mathfrak{a}$（定理1）トスレバ $[a]-[a][b_\alpha] \in \mathfrak{a}$ トナリテ矛盾ス。故ニ Umgebung $[a]$ ハ bicompact ナリ。從ツテ $[a]$ ハ又 closed ナリ。

II. Spectrum

$\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}$. 又 $a \in \mathfrak{M}$ トス。若シ

1°. $[a] \overline{\in} \mathfrak{p}$ ナラバ、a ノ $\mathfrak{p}$ ニ於ケル Characteristic value ハ 0 ナリト云フ。$(a, \mathfrak{p}) = 0$ ト記スコトトス。

2°. $[a] \in \mathfrak{p}$ ナルトキハ $a = a_+ - a_-$ ニ對シ $[a_+][a_-] = 0$, $[a_+] + [a_-] = [a]$ ナルヲ以テ定理2ニヨリ

$$[a_+] \in \mathfrak{p}, \quad [a_-] \overline{\in} \mathfrak{p}$$

カ

$$[a_+] \overline{\in} \mathfrak{p}, \quad [a_-] \in \mathfrak{p}$$

ナリ. 上ノ時ハ a ノ $\mathfrak{p}$ ニ於ケル Characteristic value ハ $+\infty$ ナリト云ヒ

$$(a, \mathfrak{p}) = +\infty$$

下ノ時ハ $-\infty$ ナリト云ヒ

$$(a, \mathfrak{p}) = -\infty$$

ト記スコトニス。

$\pm\infty$, ノ計算ニツイテハ次ノ如ク定義ス。

$\alpha > 0$ ヲ實數トシタトキ

$$(\pm\alpha)(\pm\infty) = +\infty, \quad (\mp\alpha)(\pm\infty) = -\infty,$$

$$0(\pm\infty) = 0, \quad +\infty \pm \alpha = +\infty, \quad -\infty \pm \alpha = -\infty,$$

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty \quad (\pm\infty)(\pm\infty) = \infty,$$

$$(\mp\infty)(\pm\infty) = -\infty, \quad 0 \pm \infty = \pm\infty + 0 = \pm\infty$$

$\boxed{\text{定理4}}$ $a, b \in \mathfrak{M}$, α, β ヲ實數トスレバ

$$(\alpha a + \beta b, \mathfrak{p}) = \alpha(a, \mathfrak{p}) + \beta(b, \mathfrak{p})$$

但シ右辺ガ意味ガアルモノトス。

(証明) $(a, \mathfrak{p}) = 0$ & $(b, \mathfrak{p}) = 0 \rightarrow [a] \overline{\in} \mathfrak{p}, [b] \overline{\in} \mathfrak{p}$

$\longrightarrow [a][b]\,\bar{\in}\,\mathfrak{p}\ \&\ [a]-[a][b]\,\bar{\in}\,\mathfrak{p}$

$\longrightarrow [b]+\{[a]-[a][b]\}\,\bar{\in}\,\mathfrak{p} \longrightarrow [|a|+|b|]\,\bar{\in}\,\mathfrak{p}$

$\longrightarrow [|a+b|]\,\bar{\in}\,\mathfrak{p} \longrightarrow (a+b,\mathfrak{p})=0$

$(a,\mathfrak{p})=+\infty\ \&\ (b,\mathfrak{p})=+\infty \longrightarrow [a_+]\in\mathfrak{p},\ [b_+]\in\mathfrak{p}$

$\longrightarrow [a_+][b_+]\in\mathfrak{p} \longrightarrow [a_+][b_+]\leqq[(a+b)_+]\in\mathfrak{p}$

$\longrightarrow (a+b,\mathfrak{p})=+\infty,\quad (a,\mathfrak{p})=0\ \&\ (b,\mathfrak{p})=+\infty$

$\longrightarrow [a]\,\bar{\in}\,\mathfrak{p}\ \&\ [b_+]\in\mathfrak{p} \longrightarrow [b_+-[a]b_+]\in\mathfrak{p}$

$\longrightarrow [(a+b)_+]\in\mathfrak{p} \longrightarrow (a+b,\mathfrak{p})=+\infty$

$(0,\mathfrak{p})=0$ ハ明カ。 $\alpha>0$ トスレバ

$(a,\mathfrak{p})=+\infty \longrightarrow [a_+]\in\mathfrak{p} \longrightarrow [\alpha a_+]\in\mathfrak{p}$

$\longrightarrow [(\alpha a)_+]\in\mathfrak{p} \longrightarrow (\alpha a,\mathfrak{p})=+\infty$

$(a,\mathfrak{p})=0 \longrightarrow [a]\,\bar{\in}\,\mathfrak{p} \longrightarrow [\alpha a]\,\bar{\in}\,\mathfrak{p} \longrightarrow (\alpha a,\mathfrak{p})$

$=0.$

$\alpha<0$ トスレバ

$(a,\mathfrak{p})=+\infty \longrightarrow [a_+]\in\mathfrak{p} \longrightarrow [\alpha a_+]\in\mathfrak{p}$

$\longrightarrow [(\alpha a)_-]\in\mathfrak{p} \longrightarrow (\alpha a,\mathfrak{p})=-\infty$

故ニ証明サレタリ。

今 $(a,\mathfrak{p})=+\infty$ トス。実数 λ,μ ニ対シ

$$(b-\lambda a,\mathfrak{p})<(b-\mu a,\mathfrak{p})$$

トスレバ

$$(b-\mu a,\mathfrak{p})-(b-\lambda a,\mathfrak{p})=+\infty$$

$$((\lambda-\mu)a,\mathfrak{p})=+\infty$$

$$(\lambda-\mu)(a,\mathfrak{p})=+\infty$$

故ニ　$\lambda>\mu$ ナリ。

又 $(b-\lambda a, \mathfrak{p}) = (b-\mu a, \mathfrak{p}) = 0$

トスレバ

$$((\mu-\lambda)a, \mathfrak{p}) = 0 \qquad (\mu-\lambda)(a, \mathfrak{p}) = 0$$

從ッテ $\mu = \lambda$ ナリ。

故ニ $(b-\lambda a, \mathfrak{p})$ ハ

1°. 常ニ $(b-\lambda a, \mathfrak{p}) = +\infty$

2°. 常ニ $(b-\lambda a, \mathfrak{p}) = -\infty$

3°. 適當ナ λ_0 ニ對シ

$$(b-\lambda a, \mathfrak{p}) = \begin{cases} +\infty & \lambda < \lambda_0 \\ -\infty & \lambda > \lambda_0 \end{cases}$$

$(a, \mathfrak{p}) = -\infty$ ノ場合モ同様ナリ。

3°ノ場合ニハ、λ_0 ハ b ノ a ニ關スル relative Spectrum ト呼ビ

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = \lambda_0$$

ト記ス。

又 1°ノ場合ハ

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = +\infty$$

2°ノ場合ハ

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = -\infty$$

ト記ス。又 $(b-\lambda_0 a, \mathfrak{p}) = 0$ ナルトキハ λ_0 ヲ relative point spectrum ト云フ。

以上ニヨリ次ノ Lemma ヲ得ル。

Lemma 1. $(a,\mathfrak{p})=+\infty$ ナル時ハ $(b-\lambda a,\mathfrak{p})$ ハλノ monoton decreasing function ナリ。

又明カニ

Lemma 2. $(a,\mathfrak{p})=+\infty$ ナレバ

$$\left(\frac{\alpha a}{a},\mathfrak{p}\right)=\alpha$$

$\boxed{\text{定理 5}}$ $(a,\mathfrak{p})\neq 0$ ナルトキハ

$$\left(\frac{\alpha b+\beta c}{a},\mathfrak{p}\right)=\alpha\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)+\beta\left(\frac{c}{a},\mathfrak{p}\right)$$

α,β ハ實數。又右辺ガ意味ノアルモノトス。

（証明） $(a,\mathfrak{p})=+\infty$ ノ場合ヲ証明スレバ充分ナリ。

$$\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)=\lambda_0,\ \left(\frac{c}{a},\mathfrak{p}\right)=\mu_0$$

トスレバ，$\lambda<\lambda_0+\mu_0$ ナルλニ對シ $\lambda_0'<\lambda_0$, $\mu_0'<\mu_0$, $\lambda<\lambda_0'+\mu_0'$ ヲ定ムレバ *Lemma* 1 ニヨリ

$$\begin{aligned}((b+c)-\lambda a,\mathfrak{p})&\geqq((b+c)-(\lambda_0'+\mu_0')a,\mathfrak{p})\\&=(b-\lambda_0'a,\mathfrak{p})+(c-\mu_0'a,\mathfrak{p})=+\infty\end{aligned}$$

同様ニシテ $\lambda>\mu_0+\lambda_0$ ナレバ $((b+c)-\lambda a,\mathfrak{p})=-\infty$

故ニ $\left(\frac{b+c}{a},\mathfrak{p}\right)=\lambda_0+\mu_0$

他ノ場合モ同様ナリ。又

$$(\alpha b-\lambda a,\mathfrak{p})=\alpha\left(b-\frac{\lambda}{\alpha}a,\mathfrak{p}\right)$$

ヨリ $\left(\frac{\alpha b}{a},\mathfrak{p}\right)=\alpha\left(\frac{b}{a},\mathfrak{p}\right)$ ヲ得ル。

$\boxed{\text{定理6}}$ $(a, \mathfrak{p}) = +\infty$ ナルトキハ $b \geqq c$ ナレバ

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) \geqq \left(\frac{c}{a}, \mathfrak{p}\right)$$

（証明） 定理5ニヨリ $b \geqq 0$ ナルトキ $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) \geqq 0$ ヲ証明スレバ可ナリ。若シ $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) < 0$ トスレバ $\lambda < 0$, $(b - \lambda a, \mathfrak{p}) = -\infty$ ナル λ が存在ス。故ニ $[(b-\lambda a)_-] \in \mathfrak{p}$. 然ルニ $[a_+] \in \mathfrak{p}$. 故ニ

$$\mathfrak{p} \ni [[a_+](b-\lambda a)_-] = [([a_+]b - \lambda a_+)_-]$$
$$= [0] = 0$$

トナリ矛盾ス。

Lemma 3. $[p] \in \mathfrak{p}$ ナレバ

$$(a, \mathfrak{p}) = ([p]a, \mathfrak{p})$$

（証明） $[a_+] \in \mathfrak{p} \rightarrow [p][a_+] \in \mathfrak{p}$

$$\rightarrow [([p]a)_+] \in \mathfrak{p}$$

同様ニ

$$[a_-] \in \mathfrak{p} \rightarrow [([p]a)_-] \in \mathfrak{p}$$
$$[a] \in \mathfrak{p} \rightarrow [[p]a] = [p][a] \in \mathfrak{p}$$

Lemma 4. $(a, \mathfrak{p}) \neq 0$, $[p], \in \mathfrak{p}$ ナレバ

$$\left(\frac{[p]b}{[p]a}, \mathfrak{p}\right) = \left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)$$

（証明）

$$([p]b - \lambda[p]a, \mathfrak{p}) = (b - \lambda a, \mathfrak{p})$$

ヨリ明カナリ。

$\boxed{\text{定理7}}$ $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)$ ハ Umgebung $[a]$ 間ニテ $\mathfrak{p}$

ノ contin function ナリ。

（証明） 先ヅ $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}_0\right) = \lambda_0$ ガ finite トスル。$([a] \in \mathfrak{p}_0)$、又 $(a, \mathfrak{p}_0) = +\infty$ トスル。

然ルトキハ $[a_+] \in \mathfrak{p}_0$、故ニ Umgebung $[a_+]$ 間ニテ

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = \left(\frac{[a_+]b}{a_+}, \mathfrak{p}\right)$$

ナリ。故ニ $a > 0$ ナル場合ニ $\mathfrak{p}_0$ ニテ contin ナルコトヲ証明スレバ充分ナリ。任意ノ正数 $\varepsilon > 0$ ニ対シテ Lemma 1 ニヨリ

$$[(b-(\lambda_0+\varepsilon)a)_-] \in \mathfrak{p}_0$$
$$[(b-(\lambda_0-\varepsilon)a)_+] \in \mathfrak{p}_0$$

故ニ

$$[p] = [(b-(\lambda_0+\varepsilon)a)_-][(b-(\lambda_0-\varepsilon)a)_+]$$

ト置ケバ $[p] \in \mathfrak{p}_0$ 即チ $[p]$ ハ $\mathfrak{p}_0$ ノ Umgebung ナリ。

然ルニ $[p] \in \mathfrak{p}$ ナル任意ノ $\mathfrak{p}$ ニ対シ

$$[p](b-(\lambda_0+\varepsilon)a) = -[p](b-(\lambda_0+\varepsilon)a)_- \leqq 0$$

即チ $\quad [p]b \leqq (\lambda_0+\varepsilon)[p]a$

又

$$[p](b-(\lambda_0-\varepsilon)a) = [p](b-(\lambda_0-\varepsilon)a)_+ \geqq 0$$

即チ

$$[p]b \geqq (\lambda_0-\varepsilon)[p]a$$

ナルニヨリ

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = \left(\frac{[p]b}{[p]a}, \mathfrak{p}\right) \leqq \left(\frac{(\lambda_0+\varepsilon)[p]a}{[p]a}, \mathfrak{p}\right) = \lambda_0+\varepsilon$$

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) \geqq \left(\frac{(\lambda_0-\varepsilon)[p]a}{[p]a}, \mathfrak{p}\right) \geqq \lambda_0-\varepsilon$$

即チ

$$\left|\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) - \left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}_0\right)\right| \leqq \varepsilon$$

ナリ。故ニ $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)$ ハ $\mathfrak{p}_0$ ニテ contin ナリ。

次ニ $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}_0\right) = +\infty$ ノトキヲ考ヘル。任意ノ λ_0 ニ對シ

$$[(b-\lambda_0 a)_+] \in \mathfrak{p}_0$$

故ニ $[p] = [(b-\lambda_0 a)_+]$ ト置ケバ $[p]$ ハ $\mathfrak{p}_0$ ノ Umgebung ニシテ $[p] \in \mathfrak{p}$ ナル任意ノ $\mathfrak{p}$ ニ對シ

$$[p](b-\lambda_0 a) = (b-\lambda_0 a)_+ \geqq 0$$

即チ $\quad [p]b \geqq \lambda_0[p]a$

ナルヲ以テ

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = \left(\frac{[p]b}{[p]a}, \mathfrak{p}\right) \geqq \left(\frac{\lambda_0[p]a}{[p]a}, \mathfrak{p}\right) \geqq \lambda_0$$

又 $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}_0\right) = -\infty$ ノ場合モ同様ナリ。

$\boxed{\text{定理8}}$ $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = \pm\infty$ ナル $\mathfrak{p}$ ハ $[a]$ 間ニテ nirgends dicht ナリ。然カモ $|b| \leqq M|a|$ ナルトキハ常ニ finite ナリ。

即チ $\quad \left|\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)\right| \leqq M$

（証明）　先ヅ $|b| \leqq M|a|$ トスル。然ルトキハ

$$-Ma_+ \leqq [a_+]\, b \leqq Ma_+ ,$$

$$-Ma_- \leqq [a_-]\, b \leqq Ma_- .$$

$[a] = [a_+] + [a_-]$, $[a_+][a_-] = 0$ ナルヲ以テ，

$[a] \in \mathfrak{p}$ ナレバ $[a_+] \in \mathfrak{p}$ カ或ハ $[a_-] \in \mathfrak{p}$ ナリ。$[a_+] \in \mathfrak{p}$ トスレバ

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = \left(\frac{[a_+]\, b}{a_+}, \mathfrak{p}\right) \leqq \left(\frac{Ma_+}{a_+}, \mathfrak{p}\right) = M ,$$

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = \left(\frac{[a_+]\, b}{a_+}, \mathfrak{p}\right) \geqq \left(\frac{-Ma_+}{a_+}, \mathfrak{p}\right) = -M .$$

同様ニ　$[a_-] \in \mathfrak{p}$ ナレバ　$\left|\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)\right| \leqq M$

$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}_0\right) = +\infty$ トスレバ，任意ノ $\lambda > 0$ ニ對シ

$$[\, (b - \lambda a)_+ \,] \in \mathfrak{p}_0$$

ナリ。今 $(a, \mathfrak{p}_0) = +\infty$ トスレバ $[a_+] \in \mathfrak{p}_0$ ナルニヨリ

$$[a_+][\, (b - \lambda a)_+ \,] \in \mathfrak{p}_0$$

即チ

$$[\, (\, [a_+]\, b - \lambda a_+)_+ \,] \in \mathfrak{p}_0$$

$\mathfrak{p}_0 \ni [q]$ ナル任意ノ *Umgebung* $[q]$ ニ對シ

$$[p_\lambda] = [q][\, (\, [a_+]\, b - \lambda a_+)_- \,]$$

$$= [q][\, (\, a_+ - \frac{1}{\lambda} [a_+]\, b)_+ \,]$$

$\lim\limits_{\lambda \to \infty} \left(a_+ - \frac{1}{\lambda} [a_+]\, b \right) = a_+$ *monoton increasing*

ナルヲ以テ

$$\lim_{\lambda \to \infty} [p_\lambda] = [q][a_+]$$

故ニ充分大ナルλニ對シテハ

$$[p_\lambda] \neq 0 \qquad [p_\lambda] \leqq [q][a_+]$$

然ルニ

$$[p_\lambda]([a_+]b - \lambda a_+) = -[p_\lambda]([a_+]b - \lambda a_+)_- \leqq 0$$

即チ

$$[p_\lambda][a_+]b \leqq \lambda [p_\lambda] a_+$$

故ニ $\mathfrak{p} \ni [p_\lambda]$ ニ對シテハ

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = \left(\frac{[p_\lambda][a_+]b}{[p_\lambda]a_+}, \mathfrak{p}\right) \leqq \lambda$$

然ルニ又 $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)$ ハ $\mathfrak{p}_0$ ニテ contin ナルヲ以テ Umgebung $[q]$ ヲ最初ニ適當ニ定ムレバ、$[q]$ 間ニテハ $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) \geqq 0$ ナラシメ得ル。故ニ $[p_\lambda]$ 間デハ $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)$ ハ finite ナリ。

$\boxed{\text{定理9}}$ $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = \left(\frac{b'}{a}, \mathfrak{p}\right)$ in $[a]$ ナレトキハ

$[a]b = [a]b'$ ナリ。

（証明）定理5, 8, 9ニヨリ $\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = 0$ in $[a]$ ナルトキ $[a]b = 0$ ヲ証明スレバ可ナリ。

$[a_+]$ 間ニテハ

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = \left(\frac{[a_+]b}{a_+}, \mathfrak{p}\right) = 0$$

故ニ常ニ $\varepsilon > 0$ ナルトキハ

$$[([a_+]b - \varepsilon a_+)_-] \in \mathfrak{p},$$

$$[([a_+]b + \varepsilon a_+)_+] \in \mathfrak{p}.$$

$\mathfrak{p} \ni [a_+]$ ナル任意ノ$\mathfrak{p}$ニテ成立スルヲ以テ

$$[a_+] \leqq [([a_+]b - \varepsilon a_+)_-],$$
$$[a_+] \leqq [([a_+]b + \varepsilon a_+)_+].$$

故ニ

$$[a_+]([a_+]b - \varepsilon a_+) = -[a_+]([a_+]b - \varepsilon a_+)_- \leqq 0$$

即チ

$$[a_+]b \leqq \varepsilon a_+$$

同様ニ

$$[a_+]b \geqq -\varepsilon a_+$$

故ニ　$[a_+]b = 0$

又 $[a_-]$ 間ニテモ同様ナリ。故ニ $[a]b = 0$

$\boxed{\text{定理}10}$　$\alpha > 0$ ナル實數ニ對シ $\left(\dfrac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)$ ガ finite ナレバ

$$\left(\frac{\pm\alpha b}{\pm\alpha a}, \mathfrak{p}\right) = \left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)$$

又 $\left(\dfrac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = \pm\infty$ ナルトキハ

$$\left(\frac{\pm\alpha b}{\pm\alpha a}, \mathfrak{p}\right) = \pm\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)$$

$$\left(\frac{c}{b}, \mathfrak{p}\right)\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = \left(\frac{c}{a}, \mathfrak{p}\right)$$

（証明）　上ノ式ハ定義ヨリ明カナリ。最後ノ式ハ

$$(c - \lambda b, \mathfrak{p}) + \lambda(b - \mu a, \mathfrak{p}) = (c - \lambda\mu a, \mathfrak{p})$$

ヨリ簡単ニ証明サレル。

III. $\mathfrak{M}$ ノ表現

transfinite Induction ニヨリ $\mathfrak{M}$ ヨリ次ノ如キ Projections ノ System $\{[p_\alpha]\}$ ガ得ラレル。即チ

1°. $[p_\alpha][p_\beta]=0 \qquad (\alpha \neq \beta)$

2°. $[q][p_\alpha]=0$ ガスベテノ α ニ就イテ成立スレバ

$[q]=0$ 即チ $q=0$

此ノ如キ $\{[p_\alpha]\}$ ニ對シテハ $\mathcal{R}$ ノ M.I. $\mathfrak{p}$ ニシテ $\{[p_\alpha]\}$ ノ何レカニ含マレルモノノ集合ヲ $\mathcal{R}_0$ トスレバ $\mathcal{R}_0$ ハヤハリ Hausdorff space ニシテ locally compact ナリ。$a \in \mathfrak{M}$ ニ對シ, $\mathfrak{p} \ni [p_\alpha]$ ナラバ

$$\left(\frac{a}{p_\alpha}, \mathfrak{p}\right) = a(\mathfrak{p})$$

ナル $\mathcal{R}_0$ ニ於ケル function $a(\mathfrak{p})$ ヲ對應セシメレバ II ニヨリ $a(\mathfrak{p})$ ハ contin ナリ。

又 $a(\mathfrak{p}) = b(\mathfrak{p})$ in $\mathcal{R}_0$ ナルトキハ

$[p_\alpha]a = [p_\alpha]b$, 即チ $[p_\alpha](a-b)=0$

故ニ $a=b$ ナリ。又 II ニヨリ $a(\mathfrak{p})$ ト a ハ lattice-isomorph ナリ。

最後ニ Maximal Ideal ト Maximal normal Submodul トノ関係ニツイテ注意スル。

吉田氏ハ Birkhoff ノ maximal normal submodul ヲ用ヒタ。コンデハ此レト M.I. トノ関係ヲ述べ

ル。

$\mathfrak{p}$ ヲ M.I トスル。

$$(a, \mathfrak{p}) = 0$$

ナル a ノ全体ヲ N トスレバ定理5ニヨリ N ハ Modul ヲナス。然カモ $[a] \in \mathfrak{p}$ ナレバ $|b| \leqq |a|$ ナル b ニ對シテハ $[|b|] \leqq [a]$ ナルヲ以テ $[b] \in \mathfrak{p}$.
即チ $(b, \mathfrak{p}) = 0$ ニシテ $b \in N$ ナリ。故ニ N ハ normal ナリ。然カモ、N ハ Maximal ナルコトが証明出来ル。逆ニ又任意ノ Maximal normal submodul N ニ對シ $a \in N$, $[a]$ ノ何レニモ等シカラザル Projection ノ集合トシテ $\mathfrak{p}$ が定マル。

次ニ $\mathfrak{M}$ が Ring ナルトキハ N ハ Maximal Ideal トナル。コレ等ハ又何レ書クコトトスル。

又 [e] が Identity ナルが如キ e が存在スル場合ハ $\mathfrak{R}$ ハスベテ [e] ニ含マレル故ニ bicompact トナル。

次ニ定理8ノ補トシテ

$\boxed{\text{定理11}}$ $[a]$ 内ニテ $\left|\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)\right| \leqq M$ ナレバ、又 $[a] \, |b| \leqq M |a|$ ナリ。

（証明） 定理8ト同様 $[a_+]$ 内ト $[a_-]$ ニワケテ考ヘレバ充分ナリ。$[a_+]$ トスレバ

$$\left|\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right)\right| = \left|\left(\frac{[a_+]\,b}{a_+}, \mathfrak{p}\right)\right| \leqq M$$

故ニ

$$\left(\frac{-Ma_+}{a_+}, \mathfrak{p}\right) \leqq \left(\frac{[a_+]b}{a_+}, \mathfrak{p}\right) \leqq \left(\frac{Ma_+}{a_+}, \mathfrak{p}\right)$$

従ッテ

$$\left(\frac{[a_+]b}{a_+}, \mathfrak{p}\right) \geqq 0 \longrightarrow [a_+]b \geqq 0$$

ヲ証明スレバヨイ。任意ノ正数 $\varepsilon > 0$ ニ對シ

$$([a_+]b + \varepsilon a_+, \mathfrak{p}) = +\infty$$

即チ

$$[([a_+]b + \varepsilon a_+)_+] \in \mathfrak{p}$$

ガ $[a_+]$ ノ総テノ $\mathfrak{p}$ ニテ成立ス，故ニ

$$[([a_+]b + \varepsilon a_+)_+] \geqq [a_+]$$

従ッテ

$$[a_+]([a_+]b + \varepsilon a_+) = +[a_+]([a_+]b - \varepsilon a_+)_+$$
$$\geqq 0$$

即チ　$[a_+]b \geqq -\varepsilon a_+$

故ニ　$[a_+]b \geqq 0$ ナリ。

又定理クノ補トシテ

$\boxed{\text{定理12}}$　$[a]$ ニテ finite contin + function $f(\mathfrak{p})$ ニ對シ

$$\left(\frac{b}{a}, \mathfrak{p}\right) = f(\mathfrak{p})$$

ナル b ガ存在シ，然カモ $|[a]b| \leqq M|a|$ ナル M ガアル。

（証明）　$[a]$ ハ bicompact ナルニヨリ $f(\mathfrak{p})$ ハ $[a]$ ニテ bounded ナリ。即チ $|f(\mathfrak{p})| \leqq M$ ナル M ガアル。

任意ノ ε ニ對シ、又 $p_0 \ni [a]$ ナレバ p_0 ノ Umgebung $[p_0] \leqq [a]$ ヲ適當ニ定メ $[p_0]$ ニテ

$$|f(p)-f(p_0)|<\varepsilon$$

ナラシメ得ル。$[a]$ ハ bicompact ナルニヨリ此ノ如キ $[p_0]$ ノ finite $[p_1], \cdots\cdots, [p_n]$ ニテ cover サレル。此処ニ明カナル如ク $[p_i][p_j]=0 \ (i \neq j)$ ナラシメ得ル。今

$$b_\varepsilon = \Sigma f(p_i)[p_i]a, \quad (p_i \ni [p_i])$$

トオケバ $\varepsilon \to 0$ ニ對シ limt b が存在ス、如何トナレバ此ノ ε' ニ對シ

$$|b_\varepsilon - b_{\varepsilon}'| \leqq \left|\sum_{i,j}(f(p_i)-f(p_j'))[p_i][p_j']a\right|$$

$$\leqq Max(\varepsilon, \varepsilon')\cdot|a|$$

ナルヲ以テナリ。此ノ b ニ對シテハ

$$\left(\frac{b}{a}, p\right) = f(p)$$

トナル。如何トナレバ

$$|b_\varepsilon - b| \leqq \varepsilon|a|$$

ナルニヨリ

$$\left|\left(\frac{b_\varepsilon}{a}, p\right) - \left(\frac{b}{a}, p\right)\right| \leqq \varepsilon$$

然カモ、p ハ $[p_1], \cdots\cdots, [p_n]$ ノ何レカニ含マレルニヨリ $p \ni [p_1]$ トスレバ

$$\left(\frac{ba}{a}, p\right) = \left(\frac{[p_1]b_\varepsilon}{[p_1]a}, p\right) = f(p_1)$$

從ッテ

$$\left| f(p_1) - \left(\frac{b}{a}, p\right)\right| \leqq \varepsilon$$

又

$$|f(p_1) - f(p)| < \varepsilon$$ ナルニヨリ

$$\left| f(p) - \left(\frac{b}{a}, p\right)\right| \leqq 2\varepsilon$$

從ッテ

$$f(p) = \left(\frac{b}{a}, p\right)$$

此ノ定理ニヨッテ、若シモ $\mathfrak{M}$ ニ unit e ガ存在スレバ、$\left(\frac{a}{e}, p\right)$ トシテ bicompact Hausdorff space $\mathfrak{P}$ ニ於ケル finite function ノ総テニヨッテ $\mathfrak{M}$ ガ lattice isomorph ニ表現サレル。而カモ uniform topologie デ homeomorph デアル。即チ

$|a| \leqq \alpha e$ ナル α ノ g. l. b. ヲ $\|a\|$ トスレバ

$$\|a\| \max_{p \in \mathfrak{P}} \left(\frac{a}{e}, p\right)$$

トナル。

又 $\mathfrak{M}$ ガ (6) ナル ~~性質~~ ヲ有サズ．單ニ Archimedes ノ公理ヲ滿足スレバ $\mathfrak{M}$ ヲ拡張シテ $\overline{\mathfrak{M}}$ トシ、而カモ $\bar{a} < \bar{b}$ ナル $\overline{\mathfrak{M}}$ ノ elements ニ對シ $\bar{a} < a < \bar{b}$ ナル $a \in \mathfrak{M}$ ガ存在セシメラル。カヽル $\overline{\mathfrak{M}}$ ノ表現 $\left(\frac{\bar{a}}{e}, p\right)$ ニ對シ $\left(\frac{a}{e}, p\right)$ ハ $\max\limits_{p \in \mathfrak{P}} \left(\frac{a}{e}, p\right)$ ニ對シテ überall dicht ナリ。

$\boxed{\text{訂正}}$ 「*Teilweise geordnete Module* ノ連続性ニ就テ」――前號誌――ノ定理ユトシテ $(A_1, B_1) > (A_2, B_2)$ ナラ $(A_1, B_1) > a > (A_2, B_2)$ ナル a が存在スルトセルハ誤リニ付キ取消シマス。之ガナクトモ他ニ影響ハアリマセン。又 X_0-*Schnitt* ノ方ハアノママデハ具合が悪イカラ取消シマス。コノ所ハ何レ改メテ書ク積リデス。