915. Teilweise geordneter Modul ノ連續性

中野 秀五郎

以下述ベルコトハ既ニ知ラレテ居ルコトカモ知レヌ。或ハBirkhoffノ本ニアルノカモ知レヌガ、殘念ナガラBirkhoffノ本ヲ入手シテ居ラヌノデ分ラヌ。

Teilweise geordneter Modul $\mathfrak{M}$ トシテ，次ノ性質ヲ有スル實數体ニ關スルModulトスル。$\mathfrak{M}(a, b, \cdots\cdots)$

1) $a > b,\ b > c$ ナラバ $a > c$

2) $a \not> a$

3) a, b ニ對シ、$a \smile b,\ a \frown b$ ガ存在ス.

4) $a>b$ ナラバ $a+c>b+c$

5) $a>0$, $\alpha>0$ (αハ實數)ナラバ $\alpha a>0$

ナル條件ヲ有スルモノトスル。然ルトキハ一般ニハ

6) $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots \geqq 0$ ナラバ $a_n \geqq a_0$

ニシテ $a_n \geqq x$ ナル x ニ對シ、$a_0 \geqq x$ ナルガ如キ a_0, 即チ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g.l.b\, a_n$ ガ存在ス。

ナル條件ハ滿足セズ。ソコデ恰モ有理數ヨリ實數ヲ定義スルゴトク、$\mathfrak{M}$ ヲ拡張シテ、(6) ナル性質ヲ有サシメルコトガ出來ル。其ノ方法ニハ Dedekind ノ Schnitt ニヨル方法ト、Cantor ノ Folge ニヨル方法ト二通リアル。一般 $\mathfrak{M}$ ニテハ、コノ二通リノ方法ハ必ズシモ同一結果トハナラヌ。コゝデハ其ノ閑係ヲ述べテ見ヨウ。

I. Dedekind ノ方法　先ヅ Dedekind ノ方法ニツイテ考ヘテ見ヨウ。今 $\mathfrak{M}$ ノ element ヨリナルニツノ集合 A, B ガ次ノ性質ヲ有スルトキ, (A, B) ヲ Schnitt ト云フコトゝスル。(A, B ハ共ニ空集合ナラズ).

1) $x \in A$, $y \in B$ ナレバ $x \geqq y$

2) A ノ総テノ x ニ對シ、常ニ $x \geqq y$ ナラバ $y \in B$.

3) B ノ総テノ y ニ對シ、常ニ $x \geqq y$ ナラバ $x \in A$.

又 Schnitt (A, B) ニテ A ヲ oberer Schnitt, B ヲ unterer Schnitt ト呼ブコトゝスル。(Dedekind ト少シ異ルガ此ノ方ガ便利デアル)

Lemma 1. C ヲ lower bonded ナ集合. (

$x \in C$ ナラバ $x \geqq l$ ナルが如キ l が存在スル)ナレバ C ノ何レノ element c ニ對シ $c \geqq x$ ナル element x ノ集合 B ハ unter Schnitt デアル。又 C が upper bonded ナラバ C ノイヅレノ element c ニ對シテ $c \leqq x$ ナル element x ノ集合 A ハ oberer Schnitt デアル。

證明. B ノ何レノ element ヨリ大或ハ等シキ element ノ集合(コレハ明カニ空集合ナラズ)ヲ A トスレバ、(A, B) ハ明カニ上ノ 1), 3) ヲ滿足ス。又 A ノ何レノ element ヨリ小或ハ等シキ element ハ C ノ何レノ element ヨリ小或ハ等シキヲ以テ、B ニ屬ス。故ニ 2) モ滿足サレル。下半モ同樣ニシテ證明サレル。

Lemma 2. Schnitt (A, B) ニテハ g. l. b A, l. u. b B ノ何レカ一方が存在スレバ他方モ存在シテ相等シク且ツ A 及ビ B ニ屬ス。

證明. 若シ g. l. b A = α が存在シタトスレバ、$\alpha \geqq y$ $(y \in B)$ ナリ。

然カモ $x \geqq y$ $(y \in B)$ トスレバ $\alpha \geqq \alpha \frown x \geqq y$ $(y \in B)$ ナリ。 故ニ $\alpha \frown x \in A$ トナリ、從テ $\alpha = \alpha \frown x$ ナリ。

從ツテ又 $\alpha \leqq x$. 故ニ $\alpha =$ l. u. b B. 又 α が A 及ビ B ノ何レカニ屬スルコトハ明カナリ。

Schnitt ノ大小ヲ次ノ如ク定義ス。

(A_1, B_1), (A_2, B_2) ニテ

$A_1 < A_2$（從ッテ又 $B_1 \supset B_2$）ナルトキ

$$(A_1, B_1) \geqq (A_2, B_2)$$

定理1. Schnitt ノ集合 $\mathfrak{A}$ ガ lower bonded ナルトキハ g. l. b. $\mathfrak{A}$ ガ存在シ upper bonded ナレバ l. u. b. $\mathfrak{A}$ ガ存在ス。

證明. $\mathfrak{A}$ ガ lower bonded 即チ $(A, B) \in \mathfrak{A}$ ニ對シ

$$(A, B) \geqq (A_0, B_0)$$

ナル (A_0, B_0) ガ存在スルモノトスレバ

$$B \supset B_0$$

ナリ、故ニ $(A, B) \in \mathfrak{A}$ ナル B ノ Durchschnitt ヲ B' トスレバ、$B' \supset B_0$ 。故ニ B' ハ空集合ナラズ。然カモ B' ハ $(A, B) \in \mathfrak{A}$ ナル總テノ A ノ和集合ヲ C トスレバ、C ノイヅレヨリモ小或ハ等シキ element ノ全体ナルヲ以テ Lemma 1 ニヨリ B' ハ unterer Schnitt. 從ッテ (A', B') ナル Schnitt ガ存在ス。$(A, B) \in \mathfrak{A}$ ナレバ明カニ $(A, B) \geqq (A', B')$ ナリ。又 $(A, B) \geqq (A'', B'')$ $((A, B) \in \mathfrak{A})$ トスレバ $B \supset B''$, 故ニ $B' \supset B''$ 從ッテ $(A', B') \geqq (A'', B'')$ ナリ。從ッテ $(A', B') =$ g. l. b. $\mathfrak{A}$. 同様ニシテ後半モ證明シ得。

Schnitt (A, B) ニテ g. l. b $A = \alpha$ ガ存在スル時ハ (A, B) ヲ α ニテ表スコトヽスレバ

定理 2. $(A_1, B_1) > (A_2, B_2)$ ナレバ $(A_1, B_1) > x > (A_2, B_2)$ ナル x ガ存在ス。

証明. $B_1 \supset B_2$ ニシテ B_1 ト B_2 トハ同一ナラザルニヨリ $x_1 \in B_1$, $x \bar{\in} B_2$ ナル x_1 ガ存在ス. 此ノ x_1 ニ対シテハ

$$(A_1, B_1) \geqq x_1 > (A_2, B_2)$$

同様ニシテ $A_1 \subset A_2$ ヨリ $x_2 \bar{\in} A_1$, $x_2 \in A_2$ ナル x_2 ニ對シテハ $(A_1, B_1) > x_2 \geqq (A_2, B_2)$

故ニ $(A_1, B_1) \geqq x_1 \vee x_2 > (A_2, B_2)$, $(A_1, B_1) > x_1 \wedge x_2 \geqq (A_2, B_2)$. $x = \frac{1}{2}\{(x_1 \vee x_2) + (x_1 \wedge x_2)\} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ トスレバ

$$(A_1, B_1) > x > (A_2, B_2)$$

Schnitt ノ加法ハ次ノ如クニ定義ス。

(A_1, B_1), (A_2, B_2) ニ對シテ、定理1ニヨリ

$$(A_3, B_3) = \underset{x_1 \in A_1,\, x_2 \in A_2}{g.l.b.}\ x_1 + x_2$$

ガ存在ス。コレヲ以テ和トス。即チ

$$(A_3, B_3) = (A_1, B_1) + (A_2, B_2)$$

定理3.

$$\{(A_1, B_1) + (A_2, B_2)\} + (A_3, B_3)$$
$$= (A_1, B_1) + \{(A_2, B_2) + (A_3, B_3)\}$$

証明. $x_i \in A_i$ $(i = 1, 2, 3)$ トスレバ, 明カニ

$$x_1 + x_2 + x_3 \geqq \{(A_1, B_1) + (A_2, B_2)\} + (A_3, B_3)$$

故ニ
$$\underset{x_i \in A_i}{g.l.b}(x_1 + x_2 + x_3) \geqq \{(A_1, B_1) + (A_2, B_2)\} + (A_3, B_3)$$

又
$$\underset{x_i \in A_i}{g.l.b}(x_1 + x_2 + x_3) \leqq x_1 + x_2 + x_3$$

$$p \leqq g.l.b(x_1+x_2+x_3) \qquad p \in \mathfrak{M}$$

トスレバ $\quad p \leqq x_1+x_2+x_3$

即チ $\quad p-x_3 \leqq x_1+x_2$

故ニ $\quad p-x_3 \leqq \{(A_1, B_1)+(A_2, B_2)\}$

從テ $\quad p \leqq \{(A_1, B_1)+(A_2, B_2)\}+(A_3, B_3)$

故ニ $\quad g.l.b.(x_1+x_2+x_3)$

$$\leqq \{(A_1, B_1)+(A_2, B_2)\}+(A_3, B_3)$$

從ツテ $\quad g.l.b.(x_1+x_2+x_3)$

$$=\{(A_1, B_1)+(A_2, B_2)\}+(A_3, B_3)$$

ヨツテ定理ハ明カニ成立ス。

以上ニテ和ハ定義サレルモ、其ノ逆トシテノ差ハ必ズシモ存在セズ。差が可能ナル爲ニハ $\mathfrak{M}$ ハ尚次ノ性質ヲ有スル必要がアル。

<u>*Archimedes*ノ公理</u> $\quad p \in \mathfrak{M}$ が $p>0$ ナル時ハ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}p=0 \quad$ 即チ $g.l.b\ \frac{1}{n}p=0$ ナリ。

之レハ又次ノ如クニモ云ハレル。$q \geqq p>0$ ナルトキハ、n ヲ大ニスレバ $np \neq q$ ナリ。

以下、$\mathfrak{M}$ ハ *Archimedes* ノ公理ヲ滿足スルモノトス。

Lemma 3. *Schnitt* (A, B) ニテハ

$$\underset{x\in A,\, y\in B}{g.l.b}\ x-y=0$$

ナリ。

證明. $x \geqq y$ ヨリ $l.u.b.\ x-y \geqq 0$ ナルコトハ

明カナリ。 $l.u.b.(x-y)>0$ トスレバ、定理2ニヨリ

$$g.l.b.(x-y)>p>0$$

ナル p ガ存在ス。此ノ p ニ對シテハ

$$x>y+p \qquad (x\in A,\ y\in B)$$

故ニ $y\in B$ ナラバ $y+p\in B$. 従ッテ $y+np\in B$
$x\in A$ トスレバ

$$x>y+np \qquad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

従ッテ $0<p<\dfrac{x-y}{n}$

故ニ $g.l.b.\dfrac{1}{n}(x-y)\geqq p>0$

トナリテ archimedes ノ公理ニ矛盾ス。

定理4. (A,B) ニ對シ、$(-B,-A)$ ハ又 Schnitt ヲナシ（$-A$ ハ $x\in A$ ニ對シ、$-x$ ヨリナル集合）

$$(A,B)+(-B,-A)=0$$

証明. $(-B,-A)$ ガ Schnitt ヲナスコトハ明カナリ。故ニ lemma 3 ニヨリ

$$(A,B)+(-B,-A)=\underset{x\in A,\ y\in B}{g.l.b.}\ x-y=0$$

此定理ニヨリ減法ガ一意的ニ可能トナル。

α ヲ正ノ実数トスルトキハ、Schnitt (A,B) ヨリ $(\alpha A,\alpha B)$ トシテ、又 Schnitt ヲ得ルコトハ明カデアル。

$\alpha(A,B)=(\alpha A,\alpha B)$ ト定義ス。$(\alpha>0)$

$\alpha < 0$ ナルトキハ

$$\alpha(A, B) = (\alpha B, \alpha A)$$

又 $$0(A, B) = 0$$

トス。

定理5. α, β ヲ実数トスレバ

$$\alpha\{\beta(A, B)\} = (\alpha\beta)(A, B)$$

$$\alpha(A, B) + \beta(A, B) = (\alpha+\beta)(A, B)$$

$$\alpha(A_1, B_1) + \alpha(A_2, B_2) = \alpha\{(A_1, B_1) + (A_2, B_2)\}$$

証明. 上ノ式ハ定義ヨリ直チニ得ラレル。

$\alpha \geqq 0, \beta \geqq 0$ ナルトキハ

$$\alpha(A, B) + \beta(A, B) = \underset{x_1, x_2 \in A}{g.l.b.}(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

$$\geqq g.l.b.(\alpha+\beta)(x_1 \frown x_2) \geqq (\alpha+\beta)(A, B)$$

又 $$\alpha(A, B) + \beta(A, B) \leqq g.l.b.(\alpha+\beta)x$$

$$= (\alpha+\beta)(A, B)$$

又 $\alpha > 0$ トスレバ

$$\alpha(A, B) - \alpha(A, B) = \alpha(A, B) + ((-\alpha)B, (-\alpha)A)$$

$$= (\alpha A, \alpha B) + (-(\alpha B), -(\alpha A)) = 0$$

故ニ $\alpha \geqq 0, \ \beta < 0, \ \alpha+\beta \geqq 0$ トスレバ

$$(\alpha+\beta)(A, B) + (-\beta)(A, B) = \alpha(A, B)$$

ヨリ $$\alpha(A, B) + \beta(A, B) = (\alpha+\beta)(A, B)$$

他ノ場合モ同様ナリ。

$\alpha > 0$ トスレバ, 又 $(A_1, B_1) + (A_2, B_2) = (A_3, B_3)$ トスレバ

$$\alpha(A_1, B_1)+\alpha(A_2 . B_2)=(\alpha A_1, \alpha B_1)+(\alpha A_2, \alpha B_2)$$

$$=\underset{\substack{x_1 \in A_1 \\ x_2 \in A_2}}{g.\ l.\ b.}\ (\alpha x_1+\alpha x_2)=g.\ l.\ b \alpha\,(x_1+x_2)$$

$$=(\alpha A_3, \alpha B_3)=\alpha(A_3, B_3)$$

以上ニテ Schnitt ハ又 Teilweise geordneter Modul ヲナシ、然カモ(6)ノミナラズ、定理1モ満足ス。$\mathfrak{M}$ ニツイテ Archimedes ノ公理ヲ假定シタガ、此レハ必要デアル。若シ $\mathfrak{M}$ ガ(6)ヲ満足スル。Teilweise geordneter Modul $\overline{\mathfrak{M}}$ ニ拡張出来タトスレバ、Archimedes ノ公理ヲ $\mathfrak{M}$ ハ満足スル。

即チ　$p>0,\ p \in \mathfrak{M}$ トスレバ

$$p>\frac{1}{2} p>\frac{1}{3} p>\cdots\cdots$$

故ニ　$g.\ l.\ b.\ \frac{1}{n} p=p_0 \geqq 0 \qquad p_0 \in \overline{\mathfrak{M}}$

ナル p_0 ガ存在ス。$p_0>0$ トスレバ

$$\frac{1}{n} p>p_0 \qquad (n=1,2, \cdots\cdots)$$

$$p>n p_0$$

$$p-p_0>p-2 p_0>\cdots\cdots$$

故ニ又　$g.\ l.\ b.\ p-n p_0=q_0 \qquad q_0 \in \overline{\mathfrak{M}}$

ガ存在ス。然ルトキハ又　$p-(n-1) p_0 \geqq q_0+p_0$

$$(n=1,2, \cdots\cdots)$$

故ニ　$q_0 \geqq q_0+p_0$　即チ $0 \geqq p_0$，故ニ $p_0>$ ト矛盾ス。

故ニ　$l.\ u.\ b.\ \frac{1}{n} p=0$

又 Archimedes ノ公理ハ(1), (2), (3), (4), (5)ト独立デアル。如何トナレバ次ノ Modul ハ (1), (2), (3), (4), (5) ノ性質ハ有スルガ Archimedes ノ公理ハ充タサヌ。

(a, b) (a, b real numbers)

大小無 $a_1 > a_2$, 或ハ $a_1 = a_2$, $b_1 > b_2$ ナル時ハ

$$(a_1, b_1) > (a_2, b_2)$$

和 $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

$$\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$$

(a, b) ガ (1), (2), (3), (4), (5) ヲ充タスコトハ明カナリ。

然カモ $\left(\frac{1}{n}, 0\right) > (0, 1) > (0, 0)$ ($n = 1, 2, \cdots\cdots$) ナリ。

定理5. Schnitt (A, B) ニテ, $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots$, $a_n \in A$ ニシテ、然カモ $g.l.b\ a_n = (A, B)$ ナル Folge $a_1, a_2, \cdots\cdots$ ガ存在スレバ $b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots\cdots$, $b_n \in B$ ニテ $l.u.b\ b_n = (A, B)$ ナル Folge $b_1, b_2, \cdots\cdots$ ガ存在ス。逆モ亦成立ス。

証明. $a_1 > a_2 > \cdots\cdots$ トシテ充分デアル。

$$(A_n, B_n) = 2(A, B) - a_n$$

トスレバ

$$(A_1, B_1) < (A_2, B_2) < \cdots\cdots < (A, B)$$

$$l.u.b\,(A_n, B_n) = 2(A, B) - g.l.b\ a_n = (A, B)$$

定理2ニヨリ

$$(A_n, B_n) < b_n < (A_{n+1}, B_{n+1})$$

ナル b_n ガ存在ス。然ル時ハ $b_n \leqq (A, B)$ ニシテ

$$l.u.b.\ b_n = (A, B)$$

ナリ。逆モ同.

以上ノ如キ Schnitt (A, B) ヲ $\aleph_0$-Schnitt ト呼ブコトヽスル。

定理 6. (A_1, B_1), (A_2, B_2) ガ $\aleph_0$-Schnitt ナレバ次ノモ亦然リ。

$$(A_1, B_1) \curlywedge (A_2, B_2), \quad \alpha (A_1, B_1),$$

$$(A_1, B_1) + (A_2, B_2)$$

証明.

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots, \quad g.l.b.\ a_n = (A_1, B_1)$$

$$a_1' \geqq a_2' \geqq \cdots\cdots, \quad g.l.b\ b_n = (A_2, B_2)$$

トスレバ, 明カニ

$$g.l.b.\ a_n \curlywedge a_n' = (A_1, B_1) \curlywedge (A_2, B_2)$$

又 $\alpha > 0$ トレバ （$\alpha < 0$ ノ場合モ同様）

$$g.l.b.\ \alpha a_n = \alpha (A_1, B_1)$$

$$g.l.b\ (a_n + a_n') = (A_1, B_1) + (A_2, B_2)$$

定理 7. $(A_1, B_1) \geqq (A_2, B_2) \geqq \cdots\cdots \geqq 0$ ガ悉ク $\aleph_0$-Schnitt ナレバ、$g.l.b.\ (A_n, B_n)$ モ亦 $\aleph_0$-Schnitt ナリ。

証明. $a_{i1} \geqq a_{i2} \geqq \cdots\cdots, \quad g.l.b\ a_{in} = (A_i, B_i)$

$$n = 1, 2, \cdots$$

トスレバ

$$b_i = a_{1i} \frown a_{2i} \frown \cdots\cdots \frown a_{ii}$$

ニ對シ

$$b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots\cdots\cdots \geqq 0$$

然カモ $b_i \geqq (A_1, B_1) \frown \cdots\cdots \frown (A_i, A_i)$

$\geqq g.l.b.(A_n, B_n)$

故ニ $g.l.b\ b_n \geqq g.l.b\,(A_n, B_n)$

又 $g.l.b.\ b_i \leqq a_{in} \quad (n=1,2,\cdots\cdots)$

故ニ $g.l.b\ b_i \leqq (A_i, B_i)$

從ツテ $g.l.b\ b_n \leqq g.l.b\,(A_n, B_n)$

故ニ $g.l.b\ b_n = g.l.b\,(A_n, B_n)$ ナリ。

定理. 6, 7 ニヨリ $\mathfrak{S}_0$-Schnitt ハ又 (1)—(6) ヲ滿足スル。

II. Cantor ノ方法. 此処デハ Cantor ノ方法ヲ最初カラ述ベズニ Schnitt ヲ以テ論ズルコトヽスル。先ヅ、次ノ Folge

$$\mathfrak{a}\begin{pmatrix} a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots\cdots \\ a'_1 \leqq a'_2 \leqq \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix},\ g.l.b.\ a_n - a'_n = 0,$$

ヲ Element トシ、大小ヲ

$$\mathfrak{b}\begin{pmatrix} b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots\cdots \\ b'_1 \leqq b'_2 \leqq \cdots\cdots \end{pmatrix} \quad g.l.b\ b_n - b'_n = 0$$

ニ對シ

$$a_n \geqq b'_n \quad (n=1,2,\cdots\cdots) \text{ ナルトキ}$$

$$\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}$$

トシ $\mathfrak{a} \geqq \mathfrak{b}$ ニシテ $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ ナルトキ $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ トス。

element α ニ對シ、g. l. b a_n＝(A, B) トシテ一意的ニ$\aleph_0$-Schnitt ガ對應シ、又 $\aleph_0$-Schnitt ニハ定理5ニヨリ g. l. b a_n＝(A, B) ナルガ如キ α ガ存在スル。

故ニ element α ニヨッテ $\aleph_0$-Schnitt ト isomorph ナ Teilweise geordneter Modul ヲ得ル。又 Fundamental Folge ヨリ出發シテモ同様ナリ。

以上ヨリ解ル如ク、$\aleph_0$-Schnitt ハ $\mathfrak{M}$ ヲ含ミ (1)—(6) ヲ滿足スル modul ノ最小ナルモノナリ。又 Schnitt ハ (1)—(6) 並ニ定理 (1) ヲ滿足スル最小ノ modul ナリ。(定理2ヨリ得ラル)

最後ニ Schnitt ガ必ズシモ $\aleph_0$-Schnitt ナラザル例ヲ擧ゲル。

$f(x)$ ヲ $-\infty < x < \infty$ ニテ finite points ヲ除イテ constart ナル real function トスレバ、此等ノ全体ハ (1)—(5) ヲ滿足スル。$\aleph_0$-Schnitt トシテハタクトモ可附番個ノ点ヲ除キテ constart ナ function，又 Schnitt トシテ任意ノ function ヲ得ル。

又 $\mathfrak{M}$ ガ separable ナルトキニハ明カニ Schnitt ハ常ニ $\aleph_0$-Schnitt デアル。