# 905. Zerfällungsgruppen ノ存在ニツイテ

関 武次郎（東京物理學校）

群 $\mathfrak{N}$ ト $\mathfrak{F}$ ヲ與ヘルトキ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{F}$ ナル群 $\mathfrak{G}$ ヲ求メル問題，即チ群ノ Erweiterungstheorie ニ次ノ Artin ノ定理ガアリマス。（例ヘバ Zassenhaus; Lehrbuch der Gruppentheorie I 98頁）

定理（Artin） 群 $\mathfrak{G}$ ガ abelscher Normalteiler $\mathfrak{N}$ ヲ有スルトキハ，$\mathfrak{N}$ ニ關スル $\mathfrak{G}$ ノ Zerfällungsgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ ガ存在スル，即チ

$$\mathfrak{G} = \sum \mathfrak{N} S_\sigma, \quad \sigma \in \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{F}$$

トスルトキ，次ノ條件ヲ滿足スル $\overline{\mathfrak{G}}$ ガ存在スル。

i) $\overline{\mathfrak{G}}$ ハ $\mathfrak{G}$ ヲ含ム。

ii) $\overline{\mathfrak{G}}$ ハ Normalteiler $\overline{\mathfrak{N}}$ ヲ有シ，$\overline{\mathfrak{N}}$ ハ $\mathfrak{N}$ ヲ含ミ且ツ $\overline{\mathfrak{G}} = \sum \overline{\mathfrak{N}} S_\sigma$

iii) $\overline{\mathfrak{G}} = \overline{\mathfrak{N}} \cdot \overline{\mathfrak{F}}$ 茲ニ $\overline{\mathfrak{F}} \cong \mathfrak{F}$ $\overline{\mathfrak{N}} \cap \overline{\mathfrak{F}} = 1$

コノ Artin ノ定理ノ中デ，$\mathfrak{N}$ ガ abelsch トイフ條件ヲ省イテモ，矢張リ成立スルコトガ、次ノ如ク簡單ニ證明出來ルノデスガ，コノヤウナ證明法ハ何処カ他ニアルデセウカ御存知ノ方ガアリマシタラ，教ヘテ戴キタイト思ヒマス。

（證明） 一般ニ $\mathfrak{N}$ ト $\mathfrak{F}$ ヲ與ヘルトキ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{F}$ ナル如キ群 $\mathfrak{G}$ ハ次ノ三條件ヲ滿足スル $\mathfrak{N}$ ノ automorphism $S_\sigma$（但シ $\sigma \in \mathfrak{F}$ トスル）及ビ $\mathfrak{N}$ ノ Element ノ System（即チ Faktor-system）$C_{\sigma,\tau}$ ニヨリ一意的ニ決定サレル。（Zassenhaus 90頁）

$X, Y \in \mathfrak{N}$　$\sigma, \tau \in \mathfrak{F}$ トスルトキ

I　$(XY)^{S_\sigma} = X^{S_\sigma} Y^{S_\sigma}$

II　$(X^{S_\tau})^{S_\sigma} = X^{S_\sigma S_\tau} = (X^{S_{\sigma\tau}})^{C_{\sigma,\tau}} = X^{C_{\sigma,\tau} S_{\sigma\tau}}$

$$= C_{\sigma,\tau} X^{S_{\sigma\tau}} C_{\sigma,\tau}^{-1}$$

$$X^{S_1} = X^{C_{1,1}}$$

III　$C_{\sigma,\tau} C_{\sigma\tau,\rho} = C_{\tau,\rho}^{S_\sigma} C_{\sigma,\tau\rho}$

而シテコノトキ $\mathfrak{G} = \sum \mathfrak{N} S_\sigma$, $S_\sigma S_\tau = C_{\sigma,\tau} S_{\sigma\tau}$ トナル。

逆ニ群 $\mathfrak{G}$ ノ Normalteiler ヲ $\mathfrak{N}$ トシ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{F}$, $\mathfrak{G} = \sum \mathfrak{N} S_\sigma$, $\sigma \in \mathfrak{F}$　$S_\sigma S_\tau = C_{\sigma,\tau} S_{\sigma\tau}$, $C_{\sigma,\tau} \in \mathfrak{N}$ トオケバ Vertretersystem $\{S_\sigma\}$ 及ビ Faktor-system $\{C_{\sigma,\tau}\}$ ハ上ノ I, II, III ヲ満足スル。

サテ假定ニヨリ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{F}$ ナル故，上記ノ I, II, III ヲ満足スル $\{S_\sigma\}$, $\{C_{\sigma,\tau}\}$ が存在スル．今コノ $C_{\sigma,\tau}$ ヲ用ヒテ

I′　$(XY)^{A_\sigma} = X^{A_\sigma} Y^{A_\sigma}$　　$X, Y \in \mathfrak{N}$

II′　$(X^{A_\tau})^{A_\sigma} = X^{A_\sigma A_\tau} = (X^{A_{\sigma\tau}})^{C_{\sigma,\tau}} = X^{C_{\sigma,\tau} A_{\sigma\tau}}$

$$X^{A_1} = X^{C_{1,1}}$$

$$\text{III}' \quad C_{\sigma,\tau} C_{\sigma\tau,\rho} = C_{\tau,\rho}^{A_\sigma} C_{\sigma,\tau\rho}$$

ニヨリ $\mathfrak{K}$ ノ Erweiterung ヲ作リ之ヲ $\overline{\mathfrak{K}}$ トスレバ $\overline{\mathfrak{K}}$ ハ抽象的ニハ $\mathfrak{G}$ ト全ク同一ノモノトナル。

今 $\sigma \in \mathfrak{F}$ トスルトキ $S_\sigma^*$ ヲ $\overline{\mathfrak{K}}$ ノ Automorphism トシテ次ノ如ク定義ス.

$X \in \overline{\mathfrak{K}}$ トスルトキ $\quad X^{S_\sigma^*} = A_\sigma X A_\sigma^{-1} = X^{A_\sigma}$

然ルトキハ $X, Y \in \overline{\mathfrak{K}}$ トスルトキ

$$\text{I}'' \quad (XY)^{S_\sigma^*} = (XY)^{A_\sigma} = X^{A_\sigma} Y^{A_\sigma} = X^{S_\sigma^*} Y^{S_\sigma^*}$$

$$\text{II}'' \quad (X^{S_\tau^*})^{S_\sigma^*} = X^{S_\sigma^* S_\tau^*} = (X^{A_\tau})^{A_\sigma} = X^{A_\sigma A_\tau}$$

$$= X^{C_{\sigma,\tau} A_{\sigma\tau}} = (X^{A_{\sigma\tau}})^{C_{\sigma,\tau}} = (X^{S_{\sigma\tau}^*})^{C_{\sigma,\tau}} = X^{C_{\sigma,\tau} S_{\sigma\tau}^*}$$

$$X^{S_1^*} = X^{A_1} = X^{C_{1,1}}$$

$$\text{III}'' \quad C_{\sigma,\tau} C_{\sigma\tau,\rho} = C_{\tau,\rho}^{A_\sigma} C_{\sigma,\tau\rho} = C_{\tau,\rho}^{S_\sigma^*} C_{\sigma,\tau\rho}$$

トナルカラ, コノ I″, II″, III″ ヲ用ヒテ $\overline{\mathfrak{K}}$ ノ一ツノ Erweiterung ヲ得ル. 之ヲ $\overline{\mathfrak{G}}$ トスレバ

$$\overline{\mathfrak{G}} = \sum \overline{\mathfrak{K}} S_\sigma^* \qquad \sigma \in \mathfrak{F}$$

ト書ケル. 且ツ I″, II″, III″ ニ於テ X, Y ヲ特ニ $\mathfrak{K}$ ノ元ト考ヘレバ $\mathfrak{K}$ ノ一ツノ Erweiterung $\mathfrak{G}^* = \sum \mathfrak{K} S_\sigma^*$ ヲ得ルが明ラカニ $S_\sigma^* \rightleftarrows S_\sigma$ ニヨリ $\mathfrak{G}^* \cong \mathfrak{G}$ デアルカラ $\overline{\mathfrak{G}}$ ハ $\mathfrak{G}$ ヲ含ムト考ヘテ差支ナイ. 依ッテ以下 $S_\sigma^*$ ノ代リニ単ニ $S_\sigma$ ト書クコトトスル。

然ルトキハ $\overline{\mathfrak{G}}$ ハ $\mathfrak{G}$ ヲ含ミ且ツ $\mathfrak{G} = \sum \mathfrak{K} S_\sigma$,

$$\overline{\mathfrak{G}} = \sum \overline{\mathfrak{K}} S_\sigma$$

次ニ　$T_\sigma = A_\sigma^{-1} S_\sigma$

トスレバ $\{T_\sigma\}$ ハ $\bar{\mathfrak{G}}/\bar{\mathfrak{N}}$ ノ *Vertretersystem* ニシテ

$$T_\sigma T_\tau = A_\sigma^{-1} S_\sigma A_\tau^{-1} S_\tau = A_\sigma^{-1}(S_\sigma A_\tau^{-1} S_\sigma^{-1}) S_\sigma S_\tau$$

$$= A_\sigma^{-1}(A_\sigma A_\tau^{-1} A_\sigma^{-1}) S_\sigma S_\tau \qquad \text{（定義ニヨル）}$$

$$= (A_\sigma A_\tau)^{-1}(S_\sigma S_\tau) = (C_{\sigma,\tau} A_{\sigma\tau})^{-1}(C_{\sigma,\tau} S_{\sigma\tau})$$

$$= A_{\sigma\tau}^{-1} S_{\sigma\tau} = T_{\sigma\tau}$$

トナルカラ $\{T_\sigma\}$ ハ $\mathfrak{F}$ ト *isomorph* ナル群 $\bar{\mathfrak{F}}$ ヲ作ル。

又明ラカニ　$\bar{\mathfrak{N}} \cap \bar{\mathfrak{F}} = 1$

依ッテ定理ハ完全ニ証明サレタ。

系1　上ニ証明シタ $\bar{\mathfrak{G}} = \bar{\mathfrak{N}}\bar{\mathfrak{F}}$ ハ *direkte Produkt* $\bar{\mathfrak{G}} = \bar{\mathfrak{N}} \times \bar{\mathfrak{F}}$ トナル。

（証明）　$X \in \bar{\mathfrak{N}}$ トスレバ

$$T_\rho^X = X A_\rho^{-1} S_\rho X^{-1} = X A_\rho^{-1}(S_\rho X^{-1} S_\rho^{-1}) S_\rho = X A_\rho^{-1}(A_\rho X^{-1} A_\rho^{-1}) S_\rho$$

$$= A_\rho^{-1} S_\rho = T_\rho$$

一般ニ $\bar{\mathfrak{G}}$ ノ元ハ $XT_\sigma$ $(X \in \bar{\mathfrak{N}})$ ト書ケルカラ

$$T_\rho^{XT_\sigma} = (T_\sigma T_\rho T_\sigma^{-1})^X = T_{\sigma\rho\sigma^{-1}}^X = T_{\sigma\rho\sigma^{-1}}$$

依ッテ $\bar{\mathfrak{F}}$ ハ $\bar{\mathfrak{G}}$ ノ *Normalteiler* デアル。$\bar{\mathfrak{N}}$ モ亦 $\bar{\mathfrak{G}}$ *normalteiler* デ $\bar{\mathfrak{N}} \cap \bar{\mathfrak{F}} = 1$, $\bar{\mathfrak{G}} = \bar{\mathfrak{N}}\bar{\mathfrak{F}}$ ナル故 $\bar{\mathfrak{G}} = \bar{\mathfrak{N}} \times \bar{\mathfrak{F}}$ デアル。

<u>系2.</u> $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}\mathfrak{F}$

特ニ $\mathfrak{F}$ ガ *abelsch* ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ *Normalteiler* トナリ，従ッテ又 $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} \times \mathfrak{F}$ トナル．$\mathfrak{N}, \overline{\mathfrak{N}}, \mathfrak{G}, \overline{\mathfrak{G}}$ 及ビソノ *Vertretersystem* ヲ図示スレバ左ノ如クナル。

$$
\begin{tikzcd}
 & \overline{\mathfrak{G}} \arrow[dl, no head, "A_\sigma \text{又ハ} T_\sigma"'] \arrow[dr, no head, "S_\sigma \text{又ハ} T_\sigma"] & \\
\mathfrak{G} \arrow[dr, no head, "S_\sigma"'] & & \overline{\mathfrak{N}} \arrow[dl, no head, "A_\sigma"] \\
 & \mathfrak{N} &
\end{tikzcd}
$$

(証明) $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ元素ハ $XA_\sigma T_\tau \, (X \in \mathfrak{N})$ ト書ケルガ

$$
\begin{aligned}
XA_\sigma T_\tau &= XS_\sigma (A_\sigma^{-1} S_\sigma)^{-1} T_\tau \\
&= XS_\sigma T_{\sigma^{-1}} T_\tau \\
&= XS_\sigma T_{\sigma^{-1}\tau}
\end{aligned}
$$

$$XS_\sigma \in \mathfrak{G}$$

デアルカラ

$$\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}\mathfrak{F}$$

又系1ニ証明シタ如ク $T_\rho$ ト $\overline{\mathfrak{N}}$ ノ元素トハ可換デアルカラ

$$
\begin{aligned}
T_\rho^{S_\tau} = T_\rho^{A_\tau T_\tau} &= (T_\tau T_\rho T_{\tau^{-1}})^{A_\tau} \\
&= T_{\tau\rho\tau^{-1}}^{A_\tau} = T_{\tau\rho\tau^{-1}}
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{F}$ ガ *abelsch* ナラバ $S_\tau T_\rho S_\tau^{-1} = T_\rho$

$$\therefore \quad S_\tau^{T_\rho} = S_\tau$$

従ッテ $\mathfrak{G}$ ハ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ *Normalteiler* トナリ且ツ $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G} \times \mathfrak{F}$ トナル。

(昭和十六年一月)