904. Calkin ノ定理ニ就テ

中野　秀五郎（東大）

此度ノ大阪ノ討論會ノタメ大阪帝大ヘ來タ折吉田氏並ニ三村氏ノ話デ Calkin ガアメリカノ Bultin ニ次ノ定理ヲ証明シタト報告シテアルトノコト、即チ「Hilbert space ノ総テノ baunded operators ノ Ring $\mathfrak{L}$ 内ノ両側イデアルハ vollstetig ナ operators ノイデアルニ含マレル。勿論 vollstetig ナ operators ノ全体ハ $\mathfrak{L}$ ニテ両側イデアルヲナシテヰル。」然シ何等 Topology ニ言及セズ，又証明ノ方針モ書イテナイノデヨク分ラヌトノコトデ、早速ヨク考ヘテ見タ所、モット sharp ナ形デ簡単ニ証明出来ルコトガ分ッタ。即チ「B ヲ vollstetig デナイ baunded operators トスレバ

$$ABC = I$$

ナルガ如キ baunded operators A, C ガ存在スル.」

之レハ次ノ如クニシテ証明出来ル。

若シ、スベテノ element f ニ對シテ

$$\|Bf\| \geqq \varepsilon \|f\| \qquad (\varepsilon > 0)$$

ナラバ、$B^{-1}B = I$ ナノデ此ノトキハ明カニ成立スル。此レガ証明ノ要点デアル。

B ガ vollstetig デナケレバ、$H = B^*B$ モ亦 vollstetig デナイコトハ簡単ニワカル。H ハ baunded Hermitian デ且ツ $(Hf, f) \geqq 0$ デアルカラ

$$H = \int_0^\infty \lambda \, dE(\lambda)$$

ト書クコトガ出來ル。今 $\varepsilon > 0$ ヲ充分小ニトレバ $E_0 = I - E(\varepsilon)$ ノ closed linear manifold $\mathfrak{M}_0$ ノ dimension ハ infinite トナル。

如何トナレバ、然ラザレバ H ハ vollstetig トナルカラデアル。$\mathfrak{M}_0$ 間デハ明カニ

$$\| H f \| \geqq \varepsilon \| f \|$$

デアル故ニ $\mathfrak{M}_0$ 間ニテハ H^{-1} ガ存在スル。今 $\mathfrak{M}_0$ 内ニテハ $Af = H^{-1} f$ $\mathfrak{M}_0$ ニ orthogonal ナ Element f ニ對シテハ $Af = 0$ トスレバ A ハ bounded operator ニシテ、然カモ

$$AH = E_0$$

トナル。$\mathfrak{M}_0$ ノ complete orthonormal system ヲ $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$, 與ヘラレタ Hilbert space ノ complete orthonormal system ヲ $f_1, f_2, \cdots\cdots$ トスレバ、$\varphi_i = U f_i$ ニヨリ isometric operator U ヲ得ル。コノ U ニ對シテハ明カニ

$$U^* E_0 U = I$$

デアル。即チ

$$(U^* A B^*) B U = I$$

ニテ證明サレタ。

Calkin ノ證明ガ若シ以上ト同様トシタラ, vollstetig デナイ B ニ對シテ $ABC = I$ ナル A, C ノ存在ヲ注意シナイ

ト云フコトハ随分人ヲ喰ツタ話デアル。

此ノ Calkin ノ定理ハ以上ノ様ニ内容ハ貧弱デアルガ Hilbert space ノ此後ノ研究ニ一方向ヲ暗示シタト見レバ大イニ意味ガアルコトヽ思フ。