902. 單葉函數ノ係數問題ニ就イテ

城　憲　三（阪大工）

§1. 緒　論

單葉函數ニ於ケル主要ナ問題トシテ興味ノアルノハ，所謂 係數問題

(1)　$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots\cdots + a_n z^n + \cdots\cdots$

ガ $|z|<1$ デ正則且ツ單葉ナルガタメニハ係數ノ滿足スル必要十分條件如何ノ問題デアル。コヽデハ必要條件ダケヲ考ヘル。

周知ノ如ク 1916 年 Bierberbach ハ (1) ナル任意ノ函數ニ對シ $|a_2| \leqq 2$ ナルコトヲ證明シ，$|a_n| \leqq n$ $(3, 4 \cdots\cdots)$ ヲ證明出來ルデハナイカト想像シタ。其ノ後 1923 年 Math. Annalen デ Löwner ガ實際 $|a_3| \leqq 3$ ガ成立スルコトヲ，彼自身ノ slit domain ノ議論カラ出發シテ，證明シタノデアル。

現在未ダ $n \geqq 4$ ニ對シ，Bierberbach ノ想像ガ

當ッテキルカドウカ分ラナイ儘デアルガ，筆者ハコヽニ，スベテノ (1) ノ函數ニ対シ $|a_4| \leqq 4$ ノ成立スルコトヲ示サウ。以下ノ方法ニヨッテ $|a_5| \leqq 5$ ノ証明モ亦與ヘラレルノデアリ，一般ニ $|a_n| \leqq n$ ナルコトモ証明サレルデアラウト思ッテキルガ，コヽデハ $n=4$ ノミノ場合ニツイテ述べ，諸賢ノ御批判ヲ得ラレヽバ幸ト思フ。

§2. 近似定理

今，單位円 $|z|<1$ ヲ特種ナ領域ニ寫像スルコトヲ考ヘル。寫像函數ヲ

(2) $\quad \zeta(z) = e^{-t}(z + \cdots\cdots), \quad t>0$

ノ形デ考ヘ，之レニ依ッテ $|z|<1$ ハ ζ 平面ノ單位円 $|\zeta|<1$ ヲソノ周上ノ点 $-\eta$ カラ中心ニ向ッテ半径ニ沿ウテ線分デ切断シタ領域ニ寫像サレルトスル。斯様ナ領域ヲ *elementary slit domain* ト呼ビ，(2) ノ函數ヲ *elementary bounded slit representation* ト呼ブコトニスル。但シ (2) ノ函數ハ常ニ *normalize* シテ考ヘルトスル．即チ $\zeta(0)=0,\ \zeta'(0)>0$ トスル。

$\zeta(z)$ ヲ斯様ニシテオクト，之レニハ常ニ二ツノ独立ナ *real parameter* t, ϑ ガ含マレテ，ソレハ

$$\zeta'(0)=e^{-t},\quad \eta=e^{i\vartheta} \quad (0\leqq t,\ 0\leqq\vartheta<2\pi)$$

デ與ヘラレ，以下ニ於テ重要ナ役割ヲナス。

サテ今，全ク任意ノ *real parameter* t, ϑ $(0\leqq t,\ 0\leqq\vartheta<2\pi)$ ヲ持ツ (2) ノ形ノ函數 $\zeta_{(\vartheta,t)}(z)$ ノスベテ

ノ集リヲ $\mathfrak{F}_1$ トシヨウ。

$\vartheta=0$ ナルトキノ函数 $w=\zeta_{(0,t)}(z)$ ハ方程式

$$\frac{w}{(1-w)^2}=\alpha\frac{z}{(1-z)^2},\quad \alpha=e^{-t}$$

カラ得ラレ，一般ニ，$\zeta_{(\vartheta,t)}(z)=\bar{\eta}\,\zeta_{(0,t)}(\eta z)$ デアルカラ，$w=\zeta_{(\vartheta,t)}(z)$ ハ，次ノ方程式ヲ満足スルコトが分ル。

$$(3)\quad \frac{w}{(1-\eta w)^2}=\alpha\frac{z}{(1-\eta z)^2},\quad \alpha=e^{-t},\ \eta=e^{i\vartheta}$$

吾々ハ，之等ノ函数ノ <u>iteration</u> ヲ考ヘル．即チ $\zeta_1, \zeta_2, \cdots\cdots, \zeta_n$ ヲ $\mathfrak{F}_1$ ニ属スル全ク勝手ナ函数トシテ，$\zeta_1(\zeta_2(\cdots\cdots(\zeta_n(z))\cdots\cdots))$ ナル函数ヲ作ル．斯様ナ n 個ノ elementary bounded slit representation ノ iteration デ與ヘラレル函数ノスベテノ集リヲ $\mathfrak{F}_n$ デ表ハスコトトスル。

ソコデ，証明セントスル近似定理デハ，モシ

$$(4)\quad f(z)=e^{-t_0}(z+\cdots\cdots),\quad t_0>0$$

ヲ $|z|<1$ ニ於ケル<u>任意</u>ノ bounded slit representation トシタトキニ，即チ $f(z)$ ハ $|z|<1$ ナル単位円ヲ全ク任意ノ形ヲシタ cut デ切断サレタ単位円領域ニ寫像スルモノデアルトキニ，何時デモ $f(z)$ ハ $\mathfrak{F}_n$ ノ函数デ近似出来ルト云フコトヲ示シタイノデアル。即チ次ノ定理ヲ証明スル。

$\boxed{\text{近似定理 I}}$ $|z|<1$ ニ於ケル任意ノ normalize シタ bounded slit representation ヲナス函数 $f(z)$

ニ對シ，常ニ $\mathfrak{F}_n$ ニ屬スル函數ノ series $\mathcal{S}_n$ ガ存在シ，$n \to \infty$ ナルトキ $\mathcal{S}_n$ ハ $|z|<1$ ノ內部 $|z| \leqq \rho\ (0<\rho<1)$ ニ於テ，uniformly ニ $f(z)$ ニ收斂スル。

$\boxed{\text{証明}}$ 考ヘルスベテノ函數ハ normalize シテオク．函數 $g_n(z)=f(\rho_n z)$，$\rho_n=1-\frac{1}{n}$，$n=2,3,\cdots\cdots$ ハ，$|z|<1$ ヲ，單位円內ニ於テ analytic curve デ閉マレタ領域ニ寫像スル。而シテ $g_n(z)$ ハ $n \to \infty$ ニ對シ，$|z|<1$ ノ內部デ uniformly ニ $f(z)$ ニ收斂スルカラ，コノ近似定理ニ於テハ，最初カラ $f(z)$ ノ領域 G，$\overline{G}$ ハ單位円內ニ橫ハルトシ，且ツ $f(z)$ ハ $|z| \leqq 1$ デ regular ト假定スル。

トコロガ，斯樣ナ寫像函數 $w=f(z)$ ハ，Löwner モ示シタ樣ニ，bounded slit representation デ近似スルコトガ出來ル。即チ，ソノ方法ハ $|w|<1$ 內ニ單位円周上ノ或ル一点 P カラ出發シテ $f(z)$－領域ノ周上ノ或ル一点 P^* ニ到ル slit ヲ作リ，コノ slit ヲ $f(z)$－領域ノ周ニ沿ウテ P^* ノ近リマデ歸リ來ルマデ延長スル．今モシ P_n ヲ $f(z)$－領域ノ周上ヲ P^* ニ近ヅク点列トシタトキ，單位円 $|w|<1$ ニ周上ノ点 P カラ P_n マデ slits $\mathfrak{T}_n$ ヲ施シタ slit domain ガ得ラレルガ，之レ等ノ slit domain G_n ハ核トシテ $f(z)$-domain ヲ有スルカラ，G_n ヲ $|z|<1$ ニ寫像スル函數ヲ $\psi_n(z)$ トスレバ，$\psi_n(z)$ ハ $n \to \infty$ ニ對シ，Carathéodory ノ定理ニヨリ $|z| \leqq \rho$，$0<\rho<1$ ニ於テ uniformly ニ $f(z)$ ニ收斂スル．尚

slits $\mathfrak{J}_n$ ハ analytic curve ト考ヘテ近似的ニ差支ヘナイ。

扨, 近似定理ハ Löwner ノ定理ニヨッテ次ノ様ニ証明スルコトが出来ル. Löwner ニヨレバ如何ナル normalized bounded slit representation:

$$f(z) = e^{-t_0}\{z + b_2(t_0)z^2 + b_3(t_0)z^3 + \cdots\},$$

$$t_0 > 0$$

ニ對シテモ, 恒ニ $0 \leqq t \leqq t_0$ ニ於テ $|K(t)| = 1$ ナル continuous ナ函數 $K(t)$ が對應シ, $f(z) = f(z, t_0)$ ハ initial condition $f(z, 0) = z$ ノ下ニ微分方程式

$$(5) \quad \frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -f(z,t)\frac{1 + K(t)f(z,t)}{1 - K(t)f(z,t)}$$

ノ解デアル。

コノコトカラ係數 $b_2(t_0)$, $b_3(t_0)$ 等ノ parametric function $K(t)$ ニヨル積分表示式

$$(6) \quad \begin{cases} b_2(t_0) = -2\displaystyle\int_0^{t_0} e^{-t}K(t)\,dt, \\ b_3(t_0) = 4\left[\displaystyle\int_0^{t_0} e^{-t}K(t)\,dt\right]^2 - 2\displaystyle\int_0^{t_0} e^{-2t}K^2(t)\,dt, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

が得ラレル。

単位円 $|z| < 1$ 内ノ任意ノ bounded slit representation ニ對シ常ニ $0 \leqq t \leqq t_0$ ニ於テ continuous ナ parametric function $K(t)$ が對應スルか, 我々

ハコノ $K(t)$ ヲ stepwise constant function:

$$K^{(n)}(t)=K^{(n)}=\text{constant},\quad t^{(i-1)}\leqq t\leqq t^{(i)}$$

$$(i=1,2,\ldots\ldots,n)$$

デ近似スル。但シココニ，$t^{(0)}=0$, $t^{(n)}=t_0$ デ $t^{(1)}$, $t^{(2)}$, ……, $t^{(n-1)}$ ハ変域 $(0, t_0)$ ヲ n 個ノ小変域ニ分ツ分点デアル．斯ノ如クシテ n ヲ適当ニトリ $0\leqq t\leqq t_0$ ノ t ニ對シ

$$|K(t)-K^{(n)}(t)|<\varepsilon_n$$

ナラシメルコトが出来ル。ココニ $n\to\infty$, $t_i=t^{(i)}-t^{(i-1)}\to 0$ ノトキハ $\varepsilon_n\to 0$ トナル。

簡単ニ $t_1=t_2=\cdots\cdots=t_n=t^*$ トスルト，$t^*=\frac{t_0}{n}$ トナルが，コノトキニハ

$$K^{(n)}(t)=K^{(n)}_{\lambda},\quad \frac{(\lambda-1)t_0}{n}\leqq t\leqq\frac{\lambda t_0}{n}$$

$$(\lambda=1,2,\ldots\ldots,n)$$

ト取ルがヨイ。

シカシ，parametric function トシテ $K^{(n)}(t)$ ヲ有シ，Löwner ノ微分方程式ヲ満足スル函数ヲ $f^{(n)}(z,t_0)=e^{-t_0}\{z+b_2^{(n)}(t_0)z^2+\cdots\cdots\}$ トスレバ $(f^{(n)}(z,0)=z)$ 之レハ $\mathfrak{F}_n$ ノ函数トナル．何トナレバ $0\leqq t\leqq t_0$ デ $K(t)$ が常数ナラバ容易ニ Löwner ノ微分方程式ノ解ハ $\mathfrak{F}_1$ ノ函数ナルコトが知ラレ，$K(t)=K^{(n)}(t)$ ナルトキハ t ノ小変域デ $K^{(n)}(t)$ ハ常数デアルカラ，上ノ場合組合ハセデ $K(t)=K^{(n)}$ ニ對シテハ $\mathfrak{F}_n$ ノ函数トナル。

ダカラ，(b)ニ依ツテ，任意ノ $\varepsilon^* > 0$，正整数 m ヲ與ヘタルトキ，之レニ對シテ $n_0 = n_0(m, \varepsilon^*)$ ヲ選ブコトガ出来，

$$n \geqq n_0,\quad \mu \leqq m \text{ ニ對シ } \quad |b_\mu - b_\mu^{(n)}| < \varepsilon^*$$

ガ成立スル。

トコロガ $f^{(n)}(z, t_0) = e^{-t_0}\{z + b_2^{(n)}(t_0)z^2 + \cdots\cdots\}$ ハ $|z|<1$ デ normal family ヲ作ルカラ，subsequence $f^{(n_\nu)}(z, t_0)$ ガ存在シ，$n_\nu \to \infty$ ノトキ之ノ sequence ハ $|z|<1$ ノ内部デ uniformly ニ $f(z, t_0)$ ニ収斂スル。

依ツテ近似定理Ⅰハ証明サレタ。

扨テ次ニ，我々ハ bounded デナイ単葉函数：

$$s(z) = z + a_2 z^2 + \cdots\cdots + a_n z^n + \cdots\cdots,\quad |z|<1$$

ニ対スル近似定理ヲ考ヘル．コノトキニハ $t_0 \to \infty$ ニナルトキデ $K(t)$ ノ定義領域ハ $0 \leqq t < \infty$ デアリ，Löwner ノ積分表示公式ハ無限積分トナル。

$\boxed{\text{近似定理Ⅱ}}$ 任意ノ単葉函数 $s(z)$ ハ常ニ単位円ノ内部 $|z| \leqq \rho < 1$，$0<\rho<1$ ニ於テ次ノ様ナ函数 $\Phi_n(z)$ ニ依テ近似サレル，但シ

$$\Phi_n(z) = \frac{\Phi_0(\zeta_1(\zeta_2(\cdots\cdots(\zeta_n(z))\cdots\cdots)))}{\zeta_1'(0)\zeta_2'(0)\cdots\cdots\zeta_n'(0)} = z + a_2^{(n)}z^2 + \cdots\cdots$$

ニシテ，$\Phi_0(z)$，$\zeta_i(z)$ ハ

$$\Phi_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \cdots\cdots,$$

$$(7)\quad \frac{\zeta_i}{(1-\eta_i\zeta_i)^2}=e^{-t_i}\frac{z}{(1-\eta_i z)^2},\quad \alpha_i=e^{-t_i},\ t_i>0$$

デ與ヘラレ，$t_i=t^{(i)}-t^{(i-1)}$ ($t^{(0)}=0$, $t^{(n)}=t_0$; $i=1, 2, \cdots\cdots, n$) デアリ，t_0 ハ相當大キク選ビ，n ヲ大ニシテ $1-\alpha_i$ ハ相當小ニスルモノトス。

(注意) $t_1=t_2=\cdots\cdots=t_n=t^*$ トスルコトヲ得。コノトキハ $\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_n=\alpha^*$ トオキ，$t^*=\frac{t_0}{n}$ デアルカラ，$n\to\infty$ ノトキ $1-\alpha^*=1-e^{-\frac{t_0}{n}}\to 0$ トナル。

$\boxed{\text{証明}}$ 我々ハ変域 $0\leqq t<\infty$ ニテ定義サレタル parametric function $K(t)$ ニ對シ，二種類ノ Approximation ヲ考ヘル。

近似(1):— 函數 $K(t)$ ハ與ヘラレタル函數 $s(z)$ ニ依ツテ單一ニ $0\leqq t<\infty$ デ定メラレル。トコロガ Löwner ノ係數ノ積分表示式デノ無限積分ハ $0\leqq t<\infty$ デ考ヘラレ，然カモ $K(t)$ ナル函數ガ $|K(t)|=1$ ナル條件ノ下ニ，如何ナル函數デアッテモ uniformly ニ收斂スル。ダカラ，係數 a_n ($n=2, 3, \cdots\cdots$) ノ値ハ t_0 ヲ十分大ニスレバ，如何程ニモ近似サレル。即チ，區間 $0\leqq t\leqq t_0$ デハ $s(z)$ ニ依ツテ定マル $K(t)$ ヲ考ヘ，$t_0\leqq t<\infty$ ニ對シテハ $K(t)\equiv K^*(t)$ ヲ考ヘル，但シコノ $K(t)$ ハ $|K^*(t)|=1$ ナル全ク任意ノ函數デヨイ。斯様ナ $K(t)$ ニ對シテ計算サレル係數 a_n ノ近似値ヲ a_n^* トスレバ，我々ハ任意ノ $\varepsilon_n>0$ ニ對シ，$T(\varepsilon_n)$ ヲ選ブコトが出来テ

$t_0 \geqq T(\varepsilon_n)$ ナルトキハ $|a_n - a_n^*| < \varepsilon_n$

トスルコトガ出来ル。

以下ニ於テ，我々ハ $t_0 \leqq t < \infty$ ニ於テハ $K(t) \equiv -1$ トスルコトガ出来ルコトガ分ルダラウ。

近似(2):— $K(t)$ ハ區間 $0 \leqq t \leqq t_0$ デハ近似定理 I ノ様ニ stepwise constant function デ近似サレル．トコロガ $\Phi_n(z)$ ヲ考ヘルト，近似定理 I デ分カル様ニ，$K(t)$ ハ $0 \leqq t \leqq t_0$ デハ近似的ニ stepwise constant function デ與ヘラレ，$t_0 \leqq t < \infty$ デハ $K(t) \equiv -1$ デアル。

以上ノ二種類ノ近似ニヨツテ，全ク任意ノ $\varepsilon^* > 0$，m ヲ與ヘルト，$n_0 = n_0(m, \varepsilon^*)$ ト $T = T(m, \varepsilon^*)$ ガ定メラレ，

$n \geqq n_0$，$\mu \leqq m$ ニ對シ $|a_\mu - a_\mu^{(n)}| < \varepsilon^*$

ナル不等式ガ $t_0 \geqq T(m, \varepsilon^*)$ ニ對シテ成立スルコトガ分カル。

ダカラ，モシモアル μ ニ對シテ $|a_\mu| > \mu$ ナルコトアリトスレバ，n ヲ十分大ニシ，t_i ヲ $i = 1, 2, \cdots\cdots, n$ ニ対シテ -1 ニスレバ $t_0 \geqq T$ ナル t_0 カラキメタ區間 $(0, t_0)$ ガ細分サレ，近似度ガ高マルカラ $|a_\mu^{(n)}| > \mu$ ガ成立スルコトニナラウ．我々ハ斯様ナコトノナイコトヲ示シタイノデアル。

$$t_1 = t_2 = \cdots\cdots = t_n = t^* = \frac{t_0}{n} \text{ ノトキハ}$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots\cdots = \alpha_n = \alpha^* = e^{-\frac{t_0}{n}}$$

ダカラ, n ヲ十分大ニスレバ $1-\alpha^{*}=1-e^{-\frac{t_0}{n}}$ ハ十分小トナル。我々ハ n ヲ大ニシテ $1-\alpha^{*}$ ハ十分小ト考ヘテ我々ノ証明ヲ行ヘバヨイ。

サテ, 一般ニ $\alpha_i=e^{-t_i}$ トシテ, 前ノ (7) カラ $\zeta_i(z)$ ノ展開ハ

$$(8)\quad \zeta_i(z)=\alpha_i\{z+2(1-\alpha_i)\eta_i z^2+(1-\alpha_i)(3-5\alpha_i)\eta_i^2 z^3 \\ +2(1-\alpha_i)(2-8\alpha_i+7\alpha_i^2)\eta_i^3 z^4+\cdots\},\ 0<\alpha_i<1$$

トサル、コノ展開係數ハ本論中絶ヘズ必要トナル

我々ハ Bieberbach ノ想像定理ヲ考ヘルニ際シ, 常ニ各々ノ n ニ對シテ $\Re a_n>0$ ト考ヘテ差支ヘナイ。然ラザル場合ニハ $s(z)$ ノ代リニ $\bar{\theta}_n s(\theta_n z)$, $|\theta_n|=1$ ヲ適當ナル θ_n ヲ選ンデ考ヘタラヨイノデアル。コノ根據カラ我々ハ $t_0\leqq t<\infty$ ニ對シテハ上述ノ如リ $K(t)\equiv-1$ トシタノデアル。

以上ノコトヲ幾何学的ニ見ルナラバ, Bieberbach ノ想像ガ當ッテヰルトシタトキノ極限ノ函數ニナル $\Phi_0(z)=z(1-z)^{-2}$ ノ slit domain ヲ考ヘタ場合, $\Phi_0(z)$ ニ對シテハ $0\leqq t<\infty$ デ $K(t)\equiv-1$ ガ對應シテヰルガ, $\Phi_0(z)$ ノ領域ガ色々変化シテ来ルト $K(t)$ モ $0\leqq t<\infty$ デ定義サレタ色々ノ $|K(t)|=1$ ノ函數ニナルガ, ドンナトキデモ

$$\Re a_\mu^{(n)}\leqq\mu$$

ガ $\mu=2,3,4$ ニ對シテ成立シナケレバナラナイコトヲ n ヲ十分大ニシテ証明シタイノデアル. コノコトカラ $n\to\infty$

ナラシメ，我々ハ $\Re a_\mu \leqq \mu$ 即チ $|a_\mu| \leqq \mu$ ノ証明ヲ得ルコトヽナルカラデアル。

§3. $\boxed{\text{定理}\ |a_2| \leqq 2\ \text{ノ証明}}$

以下ニ述ベル $|a_2| \leqq 2$ ノ証明ダケナラ，Löwner ノ公式カラ直チニ得ラレルノダケレドモ，コヽデ用ヒル論法ハ次節ニ用ヒルノダシ，ソノ上、コノ節ノ結果ガ次節デ是非共必要ニナッテ来ルノデ，分ッタ定理ノ証明カラヤリ直サナケレバナラナイノデアル。我々ノ証明方法ハ a_3, a_4 等ドノ係数ニ對シテモ共通ニ適用出来ルノデ，モシコノ論法ヲ続ケルナラバ遂ニ Bieberbach ノ想像定理ヲ全部解決スルノデハナイカト思ハレル．現ニ $|a_5| \leqq 5$ ナルコトモ実際ニ証明出来ルンダカラ

我々ハ mathematical induction ヲ用ヒル。

1. approximation function $\Phi_n(z)$ ヲ $n=1$ ノトキニ考フ．コノトキハ $t^{(1)} = t_0$ デアル。

$$\Phi_1(z) = \frac{\Phi_0(\zeta_1(z))}{\alpha_1} = z + a_2^{(1)} z^2 + \cdots\cdots$$

トオケバ

$$\Phi_1'(z) = \frac{1}{\alpha_1}\frac{d\Phi_0}{d\zeta_1}\frac{d\zeta_1}{dz}; \quad \Phi_1'(0) = \left(\frac{1}{\alpha_1}\frac{d\Phi_0}{d\zeta_1}\frac{d\zeta_1}{dz}\right)_0 = 1$$

且ツ $$\Phi_1''(z) = \frac{1}{\alpha_1}\left[\frac{d^2\Phi_0}{d\zeta_1^2}\left(\frac{d\zeta_1}{dz}\right)^2 + \frac{d\Phi_0}{d\zeta_1}\frac{d^2\zeta_1}{dz^2}\right]$$

デアルカラ，(8) ヲ用ヒテ，

$$(9)\quad \Phi_1''(0)=\frac{2!}{\alpha_1}\left[2\alpha_1^2+2(1-\alpha_1)\alpha_1\eta_1\right]$$
$$=2!\,2\left[\alpha_1+(1-\alpha_1)\eta_1\right]$$

トナル。

以下ニ於テハ $\eta_n\equiv X_n+iY_n\ (X_n^2+Y_n^2=1),\ n=1,2,$ ……トオクコトニスレバ，(9)ニヨリ

$$\mathcal{R}\frac{\Phi_1''(0)}{2!}=\mathcal{R}a_2^{(1)}=2\left[\alpha_1+(1-\alpha_1)X_1\right]\equiv\varphi_2^{(1)}(X_1,\alpha_1)$$

ト表セバ，

$$\varphi_2^{(1)}(X_1,1)=2;\quad \varphi_2^{(1)}(1,\alpha_1)=2$$

デ，$\varphi_2^{(1)}(X_1,\alpha_1)$ ハ明ラカニ $X_1=1$ ノトキニ maximum トナル．依ッテ

$$\mathcal{R}\frac{\Phi_1''(0)}{2!}=\mathcal{R}a_2^{(1)}\leqq 2$$

ガ成立スル．コノ等号ハ $X_1=1$ ノトキノミ成立ツ。

2. 次ニ，$n=2$ ノ場合ヲ考ヘル．コノトキハ $t^{(2)}=t$。デアル。

$$\Phi_2(z)=\frac{\Phi_0(\zeta_1(\zeta_2(z)))}{\alpha_1\alpha_2}=\frac{\Phi_1(\zeta_2(z))}{\alpha_2}=z+a_2^{(2)}z^2+\cdots\cdots$$

トオケバ，

$$\Phi_2'(z)=\frac{1}{\alpha_2}\frac{d\Phi_1}{d\zeta_2}\frac{d\zeta_2}{dz},$$

且ツ

$$\Phi_2''(z)=\frac{1}{\alpha_2}\left[\frac{d^2\Phi_1}{d\zeta_2^2}\left(\frac{d\zeta_2}{dz}\right)^2+\frac{d\Phi_1}{d\zeta_2}\frac{d^2\zeta_2}{dz^2}\right]$$

デアリ，(9)ニヨリ

$$\left(\frac{d^2\Phi_1}{d\zeta_2^2}\right)=2!\,2\left[\alpha_1+(1-\alpha_1)\eta_1\right]$$

デアルカラ

$$\Phi_2''(0)=\frac{2!\,2}{\alpha_2}\left[(\alpha_1+(1-\alpha_1)\eta_1)\alpha_2^2+(1-\alpha_2)\alpha_2\eta_2\right]$$

$$=2!\,2\left[\alpha_1\alpha_2+(1-\alpha_1)\alpha_2\eta_1+(1-\alpha_2)\eta_2\right]$$

トナル．依ッテ

$$\mathcal{R}\frac{\Phi_2''(0)}{2!}=\mathcal{R}a_2^{(2)}=2\left[\alpha_1\alpha_2+(1-\alpha_1)\alpha_2X_1+(1-\alpha_2)X_2\right]$$

$$\equiv\varphi_2^{(2)}$$

ト表ハセバ

$$(\varphi_2^{(2)})_{\alpha_1=\alpha_2=1}=2;\quad(\varphi_2^{(2)})_{X_1=X_2=1}=2$$

デ，$\varphi_2^{(2)}$ ハ明ラカニ $X_1=X_2=1$ ノトキニ maximum トナル．依ッテ

$$\mathcal{R}\frac{\Phi_2''(0)}{2!}=\mathcal{R}\,a_2^{(2)}\leqq 2$$

ガ成立スル。コノ等号ハ $X_1=X_2=1$ ノトキノミ成立ツ．

3．一般ニ

$$\Phi_n(z)=\frac{\Phi_0(\zeta_1(\zeta_2(\cdots\cdots(\zeta_n(z))\cdots\cdots)))}{\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n}=\frac{\Phi_{n-1}(\zeta_n(z))}{\alpha_n}$$

$$=z+a_2^{(n)}z^2+\cdots\cdots$$

トオキ，コノ場合ヲ考ヘル．コノトキハ $t^{(n)}=t_0$ デアル．

$$\Phi_n'(z)=\frac{1}{\alpha_n}\frac{d\Phi_{n-1}}{d\zeta_n}\frac{d\zeta_n}{dz},$$

且ツ

$$\Phi_n''(z)=\frac{1}{\alpha_n}\left[\frac{d^2\Phi_{n-1}}{d\zeta_n^2}\left(\frac{d\zeta_n}{dz}\right)^2+\frac{d\Phi_{n-1}}{d\zeta_n}\frac{d^2\zeta_n}{dz^2}\right]$$

デアル、扨テ今

$$\Phi_{n-1}''(0)=2!2[\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_{n-1}+(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3$$
$$\cdots\cdots\alpha_{n-1}\eta_1+\cdots\cdots+(1-\alpha_{n-1})\eta_{n-1}]$$

ヲ *assume* スレバ，上式ヨリ

$$(10)\quad \Phi_n''(0)=2!2[\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n+(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3\cdots\cdots\alpha_n\eta_1+\cdots$$
$$\cdots\cdots+(1-\alpha_n)\eta_n]$$

ニシテ

$$\Re\frac{\Phi_n''(0)}{2!}=\Re a_2^{(n)}=2[\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n+(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3\cdots\cdots$$
$$\cdots\alpha_n x_1+\cdots\cdots+(1-\alpha_n)x_n]\equiv\varphi_2^{(n)}$$

ト表ハセバ

$$(\varphi_2^{(n)})_{\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_n=1}=2;$$
$$(\varphi_2^{(n)})_{x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=1}=2$$

デ，$\varphi_2^{(n)}$ ハ明ラカニ $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=1$ ノトキニ *maximum* トナル．依テ

$$\Re\frac{\Phi_n''(0)}{2!}=\Re a_2^{(n)}\leqq 2$$

ガ成立スル．コノ等号ハ $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=1$ ノトキノミ成立ツ。

依ッテ近似定理ニヨリ，t_0 ヲ相當大ニ選べバ $n\to\infty$ ナラシメテ，$\Re a_2\leqq 2$ ナル結果ヲ得ルコトが出来ル。

(注意) $a_2^{(n)}$ ダケヲ考ヘルナラバ，上ノ結果ハ容易ニ，*Löwner* ノ積分表示式

(11) $$a_2 = \lim_{t_0 \to \infty} b_2(t_0) = -2\int_0^{\infty} e^{-t} \kappa(t)\,dt$$

ニ於テ

$$\kappa(t) = -\eta_{n-i+1}, \quad t^{(i-1)} \leqq t \leqq t^{(i)} \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n);$$

$$= -1, \qquad t^{(n)} \leqq t < \infty$$

且ツ $t^{(0)}=0$, $t^{(n)}=t_0$, $\alpha_{n-i+1} = e^{-(t^{(i)}-t^{(i-1)})} = e^{-t_i}$

トオキ，上ト同ジ結果ガ得ラレル。即チ

$$a_2 = 2\left[\int_0^{t^{(1)}} e^{-t}\eta_n dt + \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} e^{-t}\eta_{n-1} dt + \cdots\cdots + \int_{t^{(n)}}^{\infty} e^{-t} dt\right]$$

$$= 2\left[e^{-t^{(n)}} + \left(1-e^{-(t^{(n)}-t^{(n-1)})}\right)e^{-t^{(n-1)}}\eta_1 + \cdots + \left(1-e^{-t^{(1)}}\right)\eta_n\right]$$

$$= 2\left[\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n + (1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3\cdots\cdots\alpha_n\eta_1 + \cdots + (1-\alpha_n)\eta_n\right]$$

トナル．シカシ斯様ナ計算法ハ a_3, a_4 等ニ對シテハ複雑シテ先キノ見透シガ困難デアル。

§4. $\boxed{\text{定理 } |a_3| \leqq 3 \text{ ノ証明}}$

ヤハリ，mathematical induction ヲ用ヒテ $\mathcal{R}a_3^{(n)} \leqq 3$ ヲ証明シテ見ヤウ。

$t_1 = t_2 = \cdots\cdots = t_n = \frac{t_0}{n}$ ト取レバ $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots\cdots = \alpha_n = \alpha^*$ デ $\alpha^* = e^{-\frac{t_0}{n}}$ デアルカラ n ヲ大キシタルトキハ α^* ハ殆ンド 1 ニ近イカラ，我々ハ $1-\alpha_i$ $(i=1,2,\cdots\cdots n)$ ハ十分小ナリトシテ証明スル。

1. $n=1$ ノトキヲ考フ．前ノ様ニ

$$\Phi_1(z)=\frac{\Phi_0(\zeta_1(z))}{\alpha_1}=z+a_2^{(1)}z^2+a_3^{(1)}z^3+\cdots\cdots$$

トオキ,

$$\Phi_1''(z)=\frac{1}{\alpha_1}\left[\frac{d^2\Phi_0}{d\zeta_1^2}\left(\frac{d\zeta_1}{dz}\right)^2+\frac{d\Phi_0}{d\zeta_1}\ \frac{d^2\zeta_1}{dz^2}\right],$$

且ツ

$$\Phi_1'''(z)=\frac{1}{\alpha_1}\left[\frac{d^3\Phi_0}{d\zeta_1^3}\left(\frac{d\zeta_1}{dz}\right)^3+3\,\frac{d^2\Phi_0}{d\zeta_1^2}\ \frac{d\zeta_1}{dz}\ \frac{d^2\zeta_1}{dz^2}+\frac{d\Phi_0}{d\zeta_1}\ \frac{d^3\zeta_1}{dz^3}\right]$$

デアリ, (8)ヲ用ヒテ,

$$\begin{aligned}\Phi_1'''(0)&=\frac{3!}{\alpha_1}\left[3\alpha_1^3+8\alpha_1^2(1-\alpha_1)\eta_1+\alpha_1(1-\alpha_1)(3-5\alpha_1)\eta_1^2\right]\\&=3!\left[3\alpha_1^2+8\alpha_1(1-\alpha_1)\eta_1+(1-\alpha_1)(3-5\alpha_1)\eta_1^2\right]\end{aligned}$$

トナル. 依ッテ

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\frac{\Phi_1'''(0)}{3!}&=\mathcal{R}\,a_3^{(1)}\\&=\left[3\alpha_1^2+8\alpha_1(1-\alpha_1)x_1+(1-\alpha_1)(3-5\alpha_1)(2x_1^2-1)\right]\\&\equiv\varphi_3^{(1)}(x_1,\alpha_1)\end{aligned}$$

ト表ハセバ

$$(\varphi_3^{(1)})_{\alpha_1=1}=3\ ;\ (\varphi_3^{(1)})_{x_1=1}=3$$

デ,

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\varphi_3^{(1)}\right)_{\alpha_1=1}=4(1-x_1)^2\geqq 0$$

ナル不等式ガ $-1\leqq x_1\leqq 1$ ナルスベテノ x_1 ニ對シテ成立ツ. $1-\alpha_1$ ハ十分小ト考ヘテヨイカラ, $\delta>0$ ヲ十分小ニトリ, $\varphi_3^{(1)}(x_1,\alpha_1)$ ノ値ヲ領域 $-1\leqq x_1\leqq 1$, $0\leqq 1-\alpha_1\leqq\delta$ デ考

ヘレバコイノデアルガ $\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\varphi_3^{(1)}$ ハ α_1 ニツキ連続ダカラ，斯様ナスベテノ X_1, α_1 ニ對シ，

$$(12) \qquad \mathcal{R}\frac{\Phi_1'''(0)}{3!} = \mathcal{R}\,a_3^{(1)} \leqq 3$$

ガ得ラレル．コノ等号ハ $X_1=1$ ノトキノミ成立ツ。

2．次ニ，$n=2$ ノトキヲ考フ。

$$\Phi_2(z) = \frac{\Phi_1(\zeta_2(z))}{\alpha_2} = z + a_2^{(2)}z^2 + a_3^{(2)}z^3 + \cdots\cdots$$

トオキ

$$\Phi_2'''(z) = \frac{1}{\alpha_2}\frac{d}{dz}\left[\frac{d^2\Phi_1}{d\zeta_2^2}\left(\frac{d\zeta_2}{dz}\right)^2 + \frac{d\Phi_1}{d\zeta_2}\frac{d^2\zeta_2}{dz^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha_2}\left[\frac{d^3\Phi_1}{d\zeta_2^3}\left(\frac{d\zeta_2}{dz}\right)^3 + 3\frac{d^2\Phi_1}{d\zeta_2^2}\frac{d\zeta_2}{dz}\frac{d^2\zeta_2}{dz^2} + \frac{d\Phi_1}{d\zeta_2}\frac{d^3\zeta_2}{dz^3}\right]$$

デアリ，

$$\mathcal{R}\left(\frac{d^3\Phi_1}{d\zeta_2^3}\right)_0 = 3!\,\varphi_3^{(1)} = 3!\left[3\alpha_1^2 + 8\alpha_1(1-\alpha_1)X_1 + (1-\alpha_1)(3-5\alpha_1)(2X_1^2-1)\right],$$

$$\left(\frac{d^2\Phi_1}{d\zeta_2^2}\right)_0 = 2!\,a_2^{(1)} = 2!\,2\left[\alpha_1 + (1-\alpha_1)\,\eta_1\right]$$

デアルカラ，

$$\mathcal{R}\Phi_2'''(0) = \frac{3!}{\alpha_2}\mathcal{R}\left[\varphi_3^{(1)}\alpha_2^3 + 4\alpha_2^2 a_2^{(1)}(1-\alpha_2)\eta_2 + \alpha_2(1-\alpha_2)(3-5\alpha_2)\eta_2^2\right]$$

$$= 3!\left[\varphi_3^{(1)}\alpha_2^2 + 8\alpha_2\cdot\mathcal{R}\left[\alpha_1+(1-\alpha_1)\eta_1\right](1-\alpha_2)\eta_2 + \mathcal{R}(1-\alpha_2)(3-5\alpha_2)\eta_2^2\right]$$

トナル．依ッテ

$$(13) \qquad \mathcal{R}\frac{\Phi_2'''(0)}{3!} = \left[\varphi_3^{(1)}\alpha_2^2 + 8\alpha_1\alpha_2(1-\alpha_2)X_2 + (1-\alpha_2)(3-5\alpha_2)(2X_2^2-1)\right.$$

$$+\boxed{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}\Big] = \varphi_3^{(2)}$$

ト表ハスコトヽスル，但シコヽニ，$\boxed{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}$ ハ因數 $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)$ ヲ有スル項ノ實數部分ヲ表ハストスル．扨テコノ $\varphi_3^{(2)}$ ニ對シ，

$$\left(\varphi_3^{(2)}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=1} = 3\,; \quad \left(\varphi_3^{(2)}\right)_{x_1=x_2=1} = 3$$

デ

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\varphi_3^{(2)}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=1} = 4(1-x_i)^2 \geqq 0$$

ガ $-1 \leqq x_i \leqq 1$ ノスベテノ x_i $(i=1,2)$ ニ對シテ成立ツ．$1-\alpha_1$，$1-\alpha_2$ ハ十分小ト考ヘテヨイカラ，$-1 \leqq x_i \leqq 1$，$0 \leqq 1-\alpha_i \leqq \delta$ ナルスベテノ x_i, α_i $(i=1,2)$ ニ對シ，

$$\Re\frac{\Phi_2'''(0)}{3!} = \Re a_3^{(2)} \leqq 3$$

ガ成立ツ．但シコノ等號ハ $x_1=x_2=1$ ノトキノミニ成立ツ．

3．一般ノ場合ヲ考ヘル．

$$\Phi_n(z) = \frac{\Phi_{n-1}(\zeta_n(z))}{\alpha_n} = z + a_2^{(n)}z^2 + a_3^{(n)}z^3 + \cdots\cdots$$

トオキ，

$$\Phi_n'''(z) = \frac{1}{\alpha_n}\left[\frac{d^3\Phi_{n-1}}{d\zeta_n^3}\left(\frac{d\zeta_n}{dz}\right)^3 + 3\,\frac{d^2\Phi_{n-1}}{d\zeta_n^2}\,\frac{d\zeta_n}{dz}\,\frac{d^2\zeta_n}{dz^2} + \frac{d\Phi_{n-1}}{d\zeta_n}\,\frac{d^3\zeta_n}{dz^3}\right]$$

扨テ，今 $\Re a_3^{(n-1)} = \varphi_3^{(n-1)}$ トオキ，

$$\left(\varphi_3^{(n-1)}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_{n-1}=1} = 3\,;$$

$$\left(\varphi_3^{(n-1)}\right)_{x_1=x_2=\cdots\cdots=x_{n-1}=1} = 3$$

及ビ $\left(\dfrac{\partial}{\partial \alpha_i}\varphi_3^{(n-1)}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_{n-1}=1}=4(1-X_i)^2\geqq 0,$

$$i=1,2,\cdots\cdots,n-1$$

ヲ assume スル. 上式ヨリ

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\Phi_n'''(0)&=3!\big[\varphi_3^{(n-1)}\alpha_n^2\\&\quad+4\alpha_n\cdot\mathcal{R}a_2^{(n-1)}(1-\alpha_n)\eta_n+\mathcal{R}(1-\alpha_n)(3-5\alpha_n)\eta_n^2\big]\\&=3!\big[\varphi_3^{(n-1)}\alpha_n^2+8\alpha_n\cdot\mathcal{R}\{\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_{n-1}+(1-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3\\&\quad\cdots\cdots\alpha_{n-1}\eta_1+\cdots\cdots+(1-\alpha_{n-1})\eta_{n-1}\}(1-\alpha_n)\eta_n\\&\quad+\mathcal{R}(1-\alpha_n)(3-5\alpha_n)\eta_n^2\big]\end{aligned}$$

トナル。依ッテ

$$(14)\quad \mathcal{R}\frac{\Phi_n'''(0)}{3!}=\big[\varphi_3^{(n-1)}\alpha_n^2+8\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n(1-\alpha_n)X_n$$
$$+(1-\alpha_n)(3-5\alpha_n)(2X_n^2-1)$$
$$+\boxed{(1-\alpha_i)(1-\alpha_n)}\big]$$
$$\equiv\varphi_3^{(n)}$$

ト表ハスコトヽスル. 但シコヽニ $\boxed{(1-\alpha_i)(1-\alpha_n)}$, $i=1,2,\cdots\cdots,n-1$ ハ因数 $(1-\alpha_i)(1-\alpha_n)$ ヲ有スル項ノ実数部分ヲ表ハストスル。扨, コノ $\varphi_3^{(n)}$ ニ對シ,

$$\left(\varphi_3^{(n)}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_n=1}=3;\quad\left(\varphi_3^{(n)}\right)_{X_1=X_2=\cdots\cdots=X_n=1}=3$$

デ,

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\varphi_3^{(n)}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_n=1}=4(1-X_i)^2\geqq 0,$$

$$(i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ガ $-1\leqq X_i\leqq 1$ ノスベテノ X_i ニ對シテ成立ツ。

即チ, $\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_n=1$ ニ於テ

$$d\varphi_3^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_3^{(n)}}{\partial\alpha_i}d\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}4(1-X_i)^2\geqq 0$$

ガ如何ナル n ニ対シテモ成立ス．上ノ等号ハ $X_1=X_2=\cdots\cdots=X_n=1$ ノトキノミ成立ツ。

特ニ，簡単ノタメニ，$\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_n=\alpha^*$ ノ場合ヲ見ルニ，先ヅ

<u>$\mu=2$</u> ノトキハ(13)ヨリ

$$\varphi_3^{(2)}=\Big[\varphi^{(1)}_{3\,\alpha_1=\alpha^*}\cdot\alpha^{*2}+8\alpha^{*2}(1-\alpha^*)X_2+(1-\alpha^*)(3-5\alpha^*)(2X_2^2-1)+\boxed{(1-\alpha^*)^2}\Big]$$

トナリ，但シコヽニ $\boxed{(1-\alpha^*)^2}$ ハ因数 $(1-\alpha^*)^2$ ヲ有スル項ノ実数部分ヲ表ハストスル．コノトキハ

$$\left(\varphi_3^{(2)}\right)_{\alpha^*=1}=3;\quad\left(\varphi_3^{(2)}\right)_{X_1=X_2=1}=3$$

ニシテ，

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\varphi_3^{(2)}\right)_{\alpha^*=1}=4(1-X_1)^2+4(1-X_2)^2\geqq 0$$

トナルガ，一般ノ場合ニハ(14)ヨリ

$$\varphi_3^{(n)}=\Big[\varphi^{(n-1)}_{3\,\alpha=\alpha^*}\cdot\alpha^{*2}+8\alpha^{*n}(1-\alpha^*)X_n+(1-\alpha^*)(3-5\alpha^*)(2X_n^2-1)+\boxed{(1-\alpha^*)^2}\Big]$$

トナリ，

$$\left(\varphi_3^{(n)}\right)_{\alpha^*=1}=3;\quad\left(\varphi_3^{(n)}\right)_{X_1=X_2=\cdots\cdots=X_n=1}=3$$

ニシテ $\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\varphi_3^{(n)}\right)_{\alpha^*=1}=\sum 4(1-X_i)^2\geqq 0$

トナリ，等号ハ $X_1=X_2=\cdots\cdots=X_n=1$ ノトキノミ成立ツ．

之レ以外ノ場合ニハスベテノ $-1\leqq X_i\leqq 1$ ノ X_i ニ對シ，

$\alpha^*=1$ ノ近傍即チ $\delta>0$ ガ存在シ $0\leqq 1-\alpha^*\leqq\delta$ ノ α^* ニ對シ

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\varphi_3^{(n)}>0$$

ダカラ，

$$\varphi_3^{(n)}\leqq 3$$

トナル．此ノ様ナ $\delta>0$ ヲ近似定理ノ意見ニ選ベバ

$1-\alpha^*=1-e^{-\frac{t_0}{n}}=\delta$ トシ，

$$t_0=n\log\frac{1}{1-\delta}$$

トナルカラ，$n\to\infty$ ナラシメバ $t_0\to\infty$ トナリ，近似定理ノ近似度ハイクラデモ高メラレル。

依テ，我々ハ

$$\mathcal{R}\frac{\Phi_n'''(0)}{3!}=\mathcal{R}a_3^{(n)}\leqq 3$$

ノ眞ナルコトヲスベテノ n ニ對シテ知リ得タ．$n\to\infty$ ナラシメテ $\mathcal{R}a_3\leqq 3$ ヲ得．

§5. 定理 $|a_4|\leqq 4$ ノ証明

コノ定理ノ証明モ，a_3 ノ場合ト全ク同ジ論法デ出來ル。

1. $n=1$ ノ場合

$$\Phi_1(z)=\frac{\Phi_0(\zeta_1(z))}{\alpha_1}=z+a_2^{(1)}z^2+a_3^{(1)}z^3+a_4^{(1)}z^4+\cdots\cdots$$

トオキ,

$$\Phi_1'''(z)=\frac{1}{\alpha_1}\left[\frac{d^3\Phi_0}{d\zeta_1^3}\left(\frac{d\zeta_1}{dz}\right)^3+3\frac{d^2\Phi_0}{d\zeta_1^2}\frac{d\zeta_1}{dz}\frac{d^2\zeta_1}{dz^2}+\frac{d\Phi_0}{d\zeta_1}\frac{d^3\zeta_1}{dz^3}\right]$$

ヨリ

$$\Phi_1^{(IV)}(z)=\frac{1}{\alpha_1}\left[\frac{d^4\Phi_0}{d\zeta_1^4}\left(\frac{d\zeta_1}{dz}\right)^4+6\frac{d^3\Phi_0}{d\zeta_1^3}\left(\frac{d\zeta_1}{dz}\right)^2\frac{d^2\zeta_1}{dz^2}\right.$$
$$\left.+\frac{d^2\Phi_0}{d\zeta_1^2}\left\{3\left(\frac{d^2\zeta_1}{dz^2}\right)^2+4\frac{d\zeta_1}{dz}\frac{d^3\zeta_1}{dz^3}\right\}+\frac{d\Phi_0}{d\zeta_1}\frac{d^4\zeta_1}{dz^4}\right]$$

依ッテ (8) ヲ用ヒテ

$$\Phi_1^{(IV)}(0)=4!\left[4\alpha_1^3+18\alpha_1^2(1-\alpha_1)\eta_1+4\alpha_1(1-\alpha_1)(5-7\alpha_1)\eta_1^2\right.$$
$$\left.+2(1-\alpha_1)(2-8\alpha_1+7\alpha_1^2)\eta_1^3\right]$$

トナル．ソコデ

$$\Re\frac{\Phi_1^{(IV)}(0)}{4!}=\left[4\alpha_1^3+18\alpha_1^2(1-\alpha_1)\eta_1+4\alpha_1(1-\alpha_1)(5-7\alpha_1)\eta_1^2\right.$$
$$\left.+2(1-\alpha_1)(2-8\alpha_1+7\alpha_1^2)\eta_1^3\right]$$
$$\equiv\varphi_4^{(1)}(\chi_1,\alpha_1)$$

ト表ハセバ

$$(\varphi_4^{(1)})_{\alpha_1=1}=4;\quad(\varphi_4^{(1)})_{\chi_1=1}=4$$

デ,

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\varphi_4^{(1)}\right)_{\alpha_1=1}=4(1-\chi_1)(2\chi_1^2-2\chi_1+1)\geqq 0$$

ナル不等式ガ $-1\leqq\chi_1\leqq 1$ ナルスベテノ χ_1 ニ対シテ成立ツ. $1-\alpha_1$ ハ十分小ト考ヘテヨイカラ, $\delta>0$ ヲ十分小ニトリ, $\varphi_4^{(1)}(\chi_1,\alpha_1)$ ノ値ヲ領域 $-1\leqq\chi_1\leqq 1$, $0\leqq 1-\alpha_1\leqq\delta$ デ考

ヘレバヨイノデアルガ $\frac{\partial}{\partial\alpha_1}(x_1, \alpha_1)$ ハ α_1 ニツキ連続ダカラ斯様ナスベテノ x_1, α_1 ニ對シ

$$\Re \frac{\Phi_1^{(IV)}(0)}{4!} = \Re\, a_4^{(1)} \leqq 4$$

ガ得ラレ，コノ等号ハ $x_1=1$ ノトキノミ成立ツ。

2. 次ニ，$n=2$ ノトキヲ考フ。

$$\Phi_2(z) = \frac{\Phi_1(\zeta_2(z))}{\alpha_2} = z + a_2^{(2)} z^2 + a_3^{(2)} z^3 + a_4^{(2)} z^4 + \cdots\cdots$$

トオキ，

$$\Phi_2^{(IV)}(z) = \frac{1}{\alpha_2}\left[\frac{d^4\Phi_1}{d\zeta_2^4}\left(\frac{d\zeta_2}{dz}\right)^4 + 6\frac{d^3\Phi_1}{d\zeta_2^3}\left(\frac{d\zeta_2}{dz}\right)^2\frac{d^2\zeta_2}{dz^2}\right.$$

$$\left. + \frac{d^2\Phi_1}{d\zeta_2^2}\left\{3\left(\frac{d^2\zeta_2}{dz^2}\right)^2 + 4\frac{d\zeta_2}{dz}\,\frac{d^3\zeta_2}{dz^3}\right\} + \frac{d\Phi_1}{d\zeta_2}\,\frac{d^4\zeta_2}{dz^4}\right]$$

デアリ，

$$\Re\left(\frac{d^4\Phi_1}{d\zeta_2^4}\right)_0 = 4!\,\varphi_4^{(1)},$$

$$\left(\frac{d^3\Phi_1}{d\zeta_2^3}\right)_0 = 3!\,a_3^{(1)} = 3!\left[3\alpha_1^2 + 8\alpha_1(1-\alpha_1)\eta_1 + (1-\alpha_1)(3-5\alpha_1)\eta_1^2\right],$$

$$\left(\frac{d^2\Phi_1}{d\zeta_2^2}\right)_0 = 2!\,a_2^{(1)} = 2!\,2\left[\alpha_1 + (1-\alpha_1)\eta_1\right]$$

デアルカラ，

$$\Re\Phi_2^{(IV)}(0) = 4!\,\Re\left[\varphi_4^{(1)}\alpha_2^3 + 6a_3^{(1)}\alpha_2^2(1-\alpha_2)\eta_2\right.$$
$$+ 2a_2^{(1)}\alpha_2(1-\alpha_2)(5-7\alpha_2)\eta_2^2$$
$$\left. + 2(1-\alpha_2)(2-8\alpha_2+7\alpha_2^2)\eta_2^3\right]$$

トナル、ソコデ

$$(14)\quad \mathcal{R}\frac{\Phi_2^{(IV)}(0)}{4!} = \Big[\varphi_4^{(1)}\alpha_2^3 + 18\alpha_1^2\alpha_2^2(1-\alpha_2)X_2$$

$$+4\alpha_1\alpha_2(1-\alpha_2)(5-7\alpha_2)(2X_2^2-1)$$

$$+2(1-\alpha_2)(2-8\alpha_2+7\alpha_2^2)(4X_2^3-3X_2)$$

$$+\boxed{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}\Big]$$

$$\equiv \varphi_4^{(2)}$$

ト表ハスコトトスル，但シココニ，$\boxed{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}$ ハ因數 $\boxed{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}$ ヲ有スル項ノ實數部分ヲ表ハストスル．

扨テ，コノ $\varphi_4^{(2)}$ ニ對シ

$$\left(\varphi_4^{(2)}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=1} = 4;\quad \left(\varphi_4^{(2)}\right)_{X_1=X_2=1} = 4$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\varphi_4^{(2)}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=1} = 4(1-X_i)(2X_i^2-2X_i+1) \geqq 0$$

ガ $-1\leqq X_i\leqq 1$ ノスベテノ X_i $(i=1,2)$ ニ對シテ成立ツ．

$1-\alpha_1$, $1-\alpha_2$ ハ十分小ト考ヘテヰルカラ，$-1\leqq X_i\leqq 1$, $0\leqq 1-\alpha_i\leqq\delta$ ナルスベテノ X_i, α_i $(i=1,2)$ ニ対シ

$$\mathcal{R}\frac{\Phi_2^{(IV)}(0)}{4!} = \mathcal{R}\,a_4^{(2)} \leqq 4$$

ガ成立ツ．但シコノ等号ハ $X_1=X_2=1$ ノトキノミニ成立ツ．

3．一般ノ場合ヲ考ヘル．

$$\Phi_n(z) = \frac{\Phi_{n-1}(\zeta_n(z))}{\alpha_n} = z + a_2^{(n)}z^2 + a_3^{(n)}z^3 + a_4^{(n)}z^4 + \cdots\cdots$$

トオキ，

$$\Phi_n^{(\mathrm{IV})}(z)=\frac{1}{\alpha_n}\left[\frac{d^4\Phi_{n-1}}{d\zeta_n^4}\left(\frac{d\zeta_n}{dz}\right)^4+6\frac{d^3\Phi_{n-1}}{d\zeta_n^3}\left(\frac{d\zeta_n}{dz}\right)^2\frac{d^2\zeta_n}{dz^2}\right.$$

$$\left.+\frac{d^2\Phi_{n-1}}{d\zeta_n^2}\left\{3\left(\frac{d^2\zeta_n}{dz^2}\right)^2+4\frac{d\zeta_n}{dz}\frac{d^3\zeta_n}{dz^3}\right\}+\frac{d\Phi_{n-1}}{d\zeta_n}\frac{d^4\zeta_n}{dz^4}\right]$$

扨，今 $\Re a_4^{(n-1)}=\varphi_4^{(n-1)}$ トオキ，

$$\left(\varphi_4^{(n-1)}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_{n-1}=1}=4\,;\ \left(\varphi_4^{(n-1)}\right)_{X_1=X_2=\cdots\cdots=X_{n-1}=1}=4$$

及ビ

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\varphi_4^{(n-1)}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_{n-1}=1}=4(1-X_i)(2X_i^2-2X_i+1)$$

$$\geqq 0,\quad i=1,2,\cdots\cdots,n-1$$

ヲ assume スル．上式ヨリ

$$\Re\Phi_n^{(\mathrm{IV})}(0)=4!\,\Re\left[\varphi_4^{(n-1)}\alpha_n^3+6a_3^{(n-1)}\alpha_n^2(1-\alpha_n)\eta_n\right.$$

$$+2a_2^{(n-1)}\alpha_n(1-\alpha_n)(5-7\alpha_n)\eta_n^2$$

$$\left.+2(1-\alpha_n)(2-8\alpha_n+7\alpha_n^2)\eta_n^3\right]$$

トナル．依ッテ

$$(15)\quad \Re\frac{\Phi_n^{(\mathrm{IV})}(0)}{4!}=\left[\varphi_4^{(n-1)}\alpha_n^3+18\alpha_1^2\alpha_2^2\cdots\cdots\alpha_n^2(1-\alpha_n)X_n\right.$$

$$+4\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n(1-\alpha_n)(5-7\alpha_n)(2X_n^2-1)$$

$$+2(1-\alpha_n)(2-8\alpha_n+7\alpha_n^2)(4X_n^3-3X_n)$$

$$\left.+\boxed{(1-\alpha_i)(1-\alpha_n)}\right]$$

$$\equiv\varphi_4^{(n)}$$

ト表ハスコトヽスル，但シコヽニ，$\boxed{(1-\alpha_i)(1-\alpha_n)}$，$i=1,2,\cdots\cdots,n-1$ ハ因數 $(1-\alpha_i)(1-\alpha_n)$ ヲ有スル項ノ實

數部分ヲ表ハストスル。扨テコノ $\varphi_4^{(n)}$ ニ對シ,

$$\left(\varphi_4^{(n)}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_n=1}=4\;;\;\left(\varphi_4^{(n)}\right)_{X_1=X_2=\cdots\cdots=X_n=1}=4$$

デ,

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\varphi_4^{(n)}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_n=1}=4(1-X_i)(2X_i^2-2X_i+1)\geqq 0,$$

$$(i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ガ $-1\leqq X_i\leqq 1$ ノスベテノ X_i ニ對シテ成立ツ.

即チ $\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_n=1$ ニ於テ,

$$d\varphi_4^{(n)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_4^{(n)}}{\partial\alpha_i}d\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}4(1-X_i)(2X_i^2-2X_i+1)\geqq 0$$

ガ如何ナル n ニ對シテモ成立ス. 上ノ等号ハ $X_1=X_2=\cdots\cdots$ $\cdots\cdots=X_n=1$ ノトキノミ成立ツ。

特ニ, 簡單ノタメニ, $\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_n=\alpha^*$ ノ場合ヲ見ルニ, 今ノ一般ノ場合ニハ (15) ヨリ

$$\begin{aligned}\varphi_4^{(n)}=\Big[\varphi_{4\,\alpha=\alpha^*}^{(n-1)}\cdot\alpha^{*3}+18\alpha^{*2n}(1-\alpha^*)X_n+4\alpha^{*n}(1-\alpha^*)(5-7\alpha^*)(2X_n^2-1)\\+2(1-\alpha^*)(2-8\alpha^*+7\alpha^{*2})(4X_n^3-3X_n)\\+\boxed{(1-\alpha^*)^2}\Big]\end{aligned}$$

トナリ, $\boxed{(1-\alpha^*)^2}$ ハ因數 $(1-\alpha^*)^2$ ヲ有スル項ノ實數部分ヲ表ハストスル。而シテ

$$\left(\varphi_4^{(n)}\right)_{\alpha^*=1}=4\;;\;\left(\varphi_4^{(n)}\right)_{X_1=X_2=\cdots\cdots=X_n=1}=4$$

ニシテ

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\varphi_4^{(n)}\right)_{\alpha^*=1}=\sum_{i=1}^{n}4(1-X_i)(2X_i^2-2X_i+1)\geqq 0$$

トナリ，等号ハ $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=1$ ノトキノミ成立ツ．之レ以外ノ場合ニハ，スベテノ $-1\leqq x_i\leqq 1$ ノ x_i ニ對シ $\alpha^*=1$ ノ近傍即チ $\delta>0$ ガ存在シ $0\leqq 1-\alpha^*\leqq\delta$ ノ α^* ニ對シ

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\varphi_4^{(n)}>0$$

ダカラ，

$$\varphi_4^{(n)}\leqq 4$$

トナル．此ノヤウナ $\delta>0$ ヲ近似定理ノ意見ニ選ベバ，$1-\alpha^*=1-e^{-\frac{t_0}{n}}=\delta$ トシ，

$$t_0=n\log\frac{1}{1-\delta}$$

トナルカラ，$n\to\infty$ ナラシメバ $t_0\to\infty$ トナリ，近似定理ノ近似度ハイクラデモ高メラレル。

依ッテ，我々ハ

$$\mathcal{R}\frac{\Phi_n^{(IV)}(0)}{4!}=\mathcal{R}a_4^{(n)}\leqq 4$$

ノ真ナルコトヲ、スベテノ n ニ對シテ知リ得タ．$n\to\infty$ ナラシメテ $\mathcal{R}a_4\leqq 4$ ヲ得。

References.

[1] Bieberbach, Sitzungsber. der preuss. Ak. der Wiss., Math. Phys. Klasse, (1916), 940–955.

[2] Löwner, Math. Annalen, 89(1923), 103-121.
[3] Basilewitch, Recueil Mathématique, 43(1936), 211-228.
[4] Peschl, Jour. für Math., 176(1936), 61-94.
[5] Joh, Proceeding of Phys.-Math. Soc. 20 (1938), 591-610