900. Teichmüller－小林ノ定理ニツイテ

吉田　徳之助（東京高師）

茲ニ w－平面上ノ三点 $w=1,\ e^{\frac{2}{3}\pi i},\ e^{\frac{4}{3}\pi i}$ ノ上ダケ對數分岐点ノミヲ有シ母數函數ノリーマン面ト位相的ニ同一ナルリーマン面 W ニツイテ考ヘル。W ノ位相樹木ヲ T トシ，T ノ一ツノ枝点ヲ出發点トシテ各枝ニ沿ッテ進ミ，最初ニアル枝点ヲ第一番ノ枝点，次ノ枝点ヲ第2番ノ枝点ト順次凡テノ枝点ニ番号ヲ付ケルコトニスルト第 n 番ノ枝点ノ個數ハ $3\cdot 2^{n-1}$ トナル．サテ第 n 番マデノ枝点ノ凡テヲ考ヘテ

ソノウチノ相連レル二枝点ノ間ニアル節点ノ個数ノ最大数ニ1ヲ加ヘタル数ヲTeichmüllerニ従ツテ$\psi(n)$デ表スコトニスル。

Teichmüller ハ Deutsche Math. 3 ニテ級数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n)}{n^2}$ が収斂スレバリーまん面 W ハ双曲的デアルコトヲ証明シタが最近小林先生ハコレヲ著シク拡張サレ級数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\psi(n)}{2^n}$ が収斂スレバリーまん面 W ハ双曲的デアルコトヲ証明サレタ。(東京文理科大学紀要1940)今更ニコレヲ拡張シテ

4ヨリ小ナル一正数$(4-\varepsilon)$ニ對シテ級数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n)}{(4-\varepsilon)^n}$が収斂スレバリーまん面Wハ双曲的デアル。

コトヲ証明シヤウト思フ。

先ヅ W ヲ角谷面 Σ ニ寫像スル。コレハ $\frac{3}{2}$ ヨリ大ナラザル Dilatations-quotient デ pseudo-regular ニナサレルノデアル。次ニ Σ ヲ上下ニダケ伸ビ縮ミセシメ第 n 番ノ枝点ト続ク第 $n+1$ 番ノ枝点トノ間ニ対應スル角谷面 Σ ノ部分ノ幅が t^n ニ等シクナルヤウニスル。茲ニ t ハ $1<t<2$ ナル任意ノ一定数トスル。コレハ Dilatations-quotient が第 n 番ノ枝点ト続ク第 $n+1$ 番ノ枝点トノ間ニ對應スル角谷面 Σ ノ部分ニ対シテハ

$$\chi(n)=\max\left(t^n,\frac{\psi(n+1)}{t^n}\right)$$

ヨリ大ナラザル pseudo-regular ナ寫像ニテナサレル. カクシテ出來タ面ヲ $\sum'$ ト名付ケル. $t>1$ ナル條件ヲ用ヒレバ $\sum'$ ヲ角谷氏ト全ク同様ノ方法デ單位円内 $|z|<1$ ニ一定數 $k(t)$ ヨリ小ナル Dilatations-quotient ヲ以テ pseudo-regular ニ寫像シ得ル. コノ際ニハ第 n 番目ノ枝点以上ニ対應スル $\sum'$ ノ部分ハ單位円内

$$\log|z| \geqq \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-1$$

ナル部分ノ内ニ寫像サレルノデアル。

以上ノ過程ニヨリテりーまん面 W ヲ單位内 pseudo-regular ニ, シカモソノ

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-1 \leqq \log|z|$$
$$\leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}-1.$$

ナル部分ヘハ $\frac{3}{2}\times\chi(n)\times k(t)$ ヨリ小ナル Dilatations-quotient デ寫像シ得ルコトがワカル。ソコデ Teichmüller ノ理論ヲ用ヒレバ級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}k(t)\cdot\chi(n)\cdot\frac{1}{2^n}\right)$$

が收斂スレバりーまん面 W ハ双曲的ナリト言ヒ得ル. コヽデ

$\frac{3}{2}k(t)$ ハ一定數, $\chi(n)=\max\left(t^n, \frac{\psi(n+1)}{t^n}\right)<t^n+\frac{\psi(n+1)}{t^n}$

且ツ $t<2$ ナル故級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}$ が收斂スルコトヲ用ヒレバ上ノ級數ハ級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n)}{(2t)^n}$$

が収斂スルトキ収斂スルコトヲ知ル。從ツテリーまん面Wハ双曲的ナリト言ヒ得ル。サテtハ$2>t>1$ナル任意ノ一定數デアッタ。從ツテ最初カラ$2t=4-\varepsilon$トオケバ證明ガ達スル。$4-\varepsilon>2$トシテヨイコト勿論デアル。

( ) 角谷氏, Teichmüller ノ理論ニ関シテハ夫々原著日本數学輯報 1936, Deutsche Math. 3. Heft 6. ヲ参照シテ戴キタイ。