890. 角谷静夫氏ノ手紙ヨリ

9月16日ニプリンストンへ到着シマシタ（紐育上陸ハ9月2日）、プリンストンハ大ヘン気持ノ良イ所デス、何モカモが気ニ入リマシタ。

Neumann ニハ最初ノ日ニ會ヒマシタ。（實ハ13日ニ一度宿ヲ決メニプリンストンへ来マシタ）13日ニ會ッナリ直グ Haar ノ Measure ノ話ヲシマシタ。Group G ノ上ノ measure μ が $x \to xa$ ナル transformation ニ関シテ zero-invariant デアリ、且ッ product space $G \times G$ ニ於テ $\mu \times \mu$ ナル measure が $(x, y) \longrightarrow (xy, y)$ ナル transformation ニ関シテ invariant デアレバ μ ハ $x \to xa$ ナル transformation ニ関シテモ invariant デアルト云フコトが証明出来マス。（Neumann Halperin ノ結果）。

$\boxed{\text{証明}}$ 先ヅ $x \to xa$ が zero-invariant デアルコトヨリ

$$\int f(x)\,dx = \int f(xa)\,w_a(x)\,dx$$

ナル如キ $f(x)$ ニ無関係ナ $w_a(x)$ が存在スル。ヨッテ任意ノ可積分ナ $f(x, y)$ ニ対シテ

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint f(xy, y)\,dx\,dy = \iint f(xya, ya)\,w_a(y)\,dx\,dy$$

$$= \iint f(xa, ya)\,w_a(y)\,dx\,dy = \iint f(xa, y)\,dx\,dy$$

ヨツテ今 $f(x,y)=g(x)h(y)$, $\int h(y)dy=1$ ト置ケバ最左辺ト最右辺トヨリ $\int f(x)dx=\int f(xa)dx$, $f(x)$ ハ任意ノ可積分函数ニ取レルカラ $x\longrightarrow xa$ ニ関シテ μ ハ invariant.

$\boxed{\text{注意}}$ シカシ $\mu\times\mu$ ガ $(x,y)\to(xy,y)$ ニ関シテ invariant ト云フコトダケヨリハ必ズシモ μ ガ $x\to xa$ ニ関シテ invariant デアルコトハ出ナイ。

Neumann ニ紙上談話會ヲ見セタラ、コンナモノガアルノカ、ト感心シテ居マシタ。吉田サンノ Pythagorian ring ノコトヲ説明シテホシイト云フノデ少シ説明シマシタラ, axiom ハドレダケカ、ト大ヘン氣ニシテ居マシタ。シカシ Neumann ニ云ハセルト abelian ring ノ場合ハ簡單デアマリ面白クナイノダサウデス: 又 abelian デナイ時ハ大ヘンムツカシクテ、例ヘバ lattice ノ axiom ハ必ズシモ満足サレナイノデス。實際2次ノ hermitian real matrix $\begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix}$ ニ於テ $\begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix}$ ガ positive definite デアルトキニ $\geqq 0$ デアルト云フコトニシマスト $^*\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ ナル二ツノ matrix ノ max. ハ存在シナイノデス、何トナレバ任意ノ x ニ對シテ

$$\begin{pmatrix}1+x^2 & x\sqrt{1+x^2}\\ x\sqrt{1+x^2} & 1+x^2\end{pmatrix}\geqq\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

トナルコトヨリ、若シ

$$\max\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix}$$

ガ存在シタトスレバ,

$$\begin{pmatrix} 1+x^2 & x\sqrt{1+x^2} \\ x\sqrt{1+x^2} & 1+x^2 \end{pmatrix} \geqq \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \geqq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

トナラネバナラナイ。シカルニコレヨリ任意ノ x ニ對シテ

$$1+x^2 \geqq a \geqq 1, \quad 1+x^2 \geqq d \geqq 1$$

$$(1+x^2-a)(1+x^2-d) \geqq (x\sqrt{1+x^2}-b)^2$$

トナラネバナラナイガ、先ヅ最初ノ二ツニ於テ $x=0$ トオケバ $a=d=1$. ヨッテ最後ノ式ハ

$$x^4 \geqq (x\sqrt{1+x^2}-b)^2$$

$$\text{or} \quad x^2 \geqq |x\sqrt{1+x^2}-b| \quad \text{for every } x$$

トナル. $x=0$ トオケバ $b=0$ デナケレバナラナイガ

$$x^2 \geqq x\sqrt{1+x^2}.$$

ハ明カニ $x>0$ ニテ成立シナイカラ、之レハ不可能デアル(証明終).

Bochner トモ話シマシタ。Bochner ハ Banach 空間ヤ ergodic theory ニ興味ヲ持ッテヰル由. Proc. Nat. Acad. ニ書イタ Bochner ノ論文 (lattice ノ値ヲ取ル函数ニ関スル ergodic theorem) ハ全然誤リダト Bochner ハ云ッテヰマス。シカシ、コノ問題ニハ hope ヲ持ッテヰルカライツカ一緒ニ語リタイト云ッテヰマシタ、又「少クトモ今後5年間ハ lattice ニ於ケル analysis ガ流行スル」ト云ッテヰマシタ。Widder-

---

* $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \geqq 0$ ナルタメニハ $a \geqq 0$, $d \geqq 0$, $ad \geqq b^2$ ガ必要且十分.

Feller Bernsten-Hille 流ノ Laplace integral ニテ表ハセルタメノ條件ト云フ定理モ一般ノ lattice デ行クサウデス。

Bohnenblust トハ（L_p）空間ノ characterization ノ話ヲシマシタ、Bohnenblust ノ結果ハ次ノ Duke M. J. ニ出マス。大ヘン旨イデスが、イツカ吉田サントト話シテ居タノト大体同ジ様デス。Bohnenblust ハ $P=\infty$ ノ場合モヤッテ居マス。（即チ abstract (M) space）が、$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots \leqq x_n \leqq \cdots\cdots \leqq \bar{x}$ ナルトキ $\sup x_n$ が存在スルト云フコトヲ假定シテ居ルノデ $0 \leqq t \leqq 1$ デノ continuous function $X(t)$ ノ空間 C ヲ含ミマセン。ヨッテ大ヘン特殊ノモノニナリマス。コノ $p=\infty$ ノ場合ハ私ノ (AM) ノ表現ノ結果ノ方が一般デ應用モヒロイワケデス。私ノ結果ヲ興味ヲ持シテ聞イテクレマシタ。

Princeton ニモ Banach 空間ニ興味ヲ持ツ人が多イノハウレシイデス。

Ambrose ト Halmos ノ二人ハ今年モ居マス。二人トモ Ergodic theorem ヤ stochastic process ニ興味ヲ持ッテ居ルノデ良イ話相手ニナリマス。Lévy ノ本ハムツカシイト云ッテ居マス、例ノ $Q(l)\equiv 0$ カ又ハ $Q(l)=1$ ト云フ定理ノ証明がワカラナイト云フノデ教ヘマシタ。Kolmogoroff ノロシア語ノ論文（enumerable inf. number of poss. state ニ関スル例ノ論文）ヲ三人デ読ムコトニナリマシタ。アレヲ英語ニホンヤクシテ呉レル

人ガアルノデス、僕ハ樋口君ニ譯シテモラッタノガ紙上談話會ニアルノデ大助カリデス。

Annals ハ大ヘン面白イデスネ。Bochner ノ論文ハ、イツカノ私ノ (AL) ノ表現ノ論文ト良ク似テキマスネ、Cohen ノ論文ハイツカ吉田サント話シ合ッタ結果ト全ク同ジデスネ。Krei-Šmulian ノ論文ハ面白イデス、今ヨンデ居マス、シカシ Weak topology ヲ用ヒルト、証明ハ大ヘン簡單ニナリ、殆ンド trivial ニナル所モアリマス (少クトモ chap. I ニテハ)、コレハ委シク調ベテカラ、マトメテ書イテ見タイト思ッテ居マス。

又、船ノ中デ (AM) ノ表現ノ定理ノ一部分ガ簡單ニナルノニ気ガツキマシタ。コレモ次ニオ知ラセ申上ゲタイト思ヒマス。

最後ニ當地デ今問題ニナッテオル解ケナイ問題ヲ二三オ知ラセ申上ゲマス。

(1) $f(x)$, $g(x)$ ガ $0 \leqq x \leqq 1$ ニテ連續且ツ互ニ independent (Steinhaus ノイミ) デアレバ $f(x)$, $g(x)$ ハ何レモ任意ノ interval $a \leqq x \leqq b$ $(0 \leqq a \leqq b \leqq 1)$ ニテ bounded variation デハナイ。(Kac)

(2) X_n ガ independent ナトキ、任意ノ $\{a_n\}$ ニ対シテ $\sum^{\infty} (X_n - a_n)$ ガ alm. ev. div. ナラバ $Q(l) \equiv 0$ トナルコトヲ直接ニ簡單ニ証明スルコト。(Halmos)

(3) $0 \leqq x, y \leqq 1$ ナル square 内ノ measure ノノ集合デ如何ナル $X + Y$ (但シ X, Y ノ濃度ハ何レモ

continuum) ナル形ノ集合ヲモ含マナイモノハ存在スルカ。(Erdös)

(4) $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n$ ガ $|z| \leqq 1$ ナル complex number ナルトキ $\prod_{i=1}^{n} |z - z_i| \leqq 1$ ナル z ノ範囲ハ単位円ノ少クトモ一ツノ radius ヲ含ム。(Erdös)

(5) Banach 空間 E ガソノ二回目ノ conjugate E^{**} ト isometric ナラバ E ハ reflexive ナリヤ。

(Tukey)

御断リ。—— 角谷氏ヨリノ私信デスガ「数学的」ダカラト南雲教授ノ御スヽメニヨリ適當ニ削ッテ出サセテ貰ヒマシタ。(吉田耕作)