888. Quasi-field ノ Normal bases

中山　正（阪大）

最近 Jacobson ハガロア理論ノ主定理ヲ次ノ様ナ意味ニ於テ Quasi-fields マデ拡ゲタ. 即チ P ヲ一ツノ quasi-field, ソコニ有限ノ outer automorphism ノ群 $\mathfrak{G}$ (unit element 以外ガミナ outer ノ意) ガ與ヘラレテヰルトシ、ソノ order ヲ n, マタ $\mathfrak{G}$ デ動カヌ元ノナス quasi-subfield ヲ Φ トスル. シカラバ $(P:\Phi)=n$ デ P ト Φ ノ間ノ quasi-fields ト $\mathfrak{G}$ ノ subgroups ノ間ニ例ノ通リノ一對一對應ガ存在スル. ($(P:\Phi)=n$ ハ両側デデアル).

以下ニオイテ、更ニ P ハ Φ ニ對シテ Normal basis ヲモツ. 即チ Φ ノ左加群 P ヲ更ニ $\mathfrak{G}$ 右加群ト見タトキ得ラレル $\mathfrak{G}$ ノ表現 (Φ ニオケル) ハ $\mathfrak{G}$ ノ正規表現ト同値デアル. 即チ更ニ云ヒカヘレバ

$$b^E,\ b^R,\ b^S,\ \cdots\cdots,\ b^T \quad (\mathfrak{G}=\{E,R,S,\cdots\cdots,T\})$$

ノ如キ一ツノ元ノ conjugates ($\mathfrak{G}$ ニ関スル) カラ成立ツテヰル P ノ Φ ニ対スル左 basis ガ存在スルコトヲ証明スル。

証明ノ方法ニツイテ: 普通ノ Commutative ノ場合ノ Normal basis ノ定理ノ証明トシテハ (Noether ノ最初ノ然シ欠点ノアッタモノヲ除キ) Deuring ノ第一ノモノ (Annalen 107), Hasse-Brauer ノモ

(Hasse ノ類体論講義, Brauer: Annalen 110), Deuring ノ第二ノモノ (Annalen 113), Stauffer (Amer. J. 58) 等ガアリ更ニ Artin ノ unpublished ノモノガアル。

最初ノ二ツハ共ニ基礎体デナク上ノ体ニオケル二表現ノ同値カラ下ノ体ニオケルモノヲ出ス方法デ本質的ニ相當近イモノデアル。シカシコノ方法ヲ直接我々ノ場合ニ modify スルコトハ非常ニ困難ニ見エル。マタ Artin ノハ interpolation ノ公式ヲ使フノデ、コレモ困難ニ見エル。以下ハ從ツテ Deuring ノ第二ノヲ (Stauffer ノモ大体同ジ idea デアル) modify スルコトヲ試ミルノデアル。

但シコノ方法ハ Speiser ノ定理ノ拡張及ビ有限群ノ表現ノ分解ヲ主ナ補助トスルノデアッテ、ソノタメニ Deuring (及ビ Stauffer) ハ第二ノ群ノ表現ノ分解ガ普通ノ如ク行ク場合、即チ体ノ標数ガ Of ノ order ヲワラズ從ツテ Of ノ群環ガ semi-simple ニナル場合ニ限ラザルヲ得ナカッタ。然シソノコトノ non-semi-simple ナ algebra ノ正規表現ノ理論 (主トシテ Brauer-Nesbitt) ハソウデナイ一般ノ場合ニマデ証明ヲ拡張スルコトヲ可能ナラシメテヰルノデアル (近刊 Frobeniusean algebras, II, 附錄)。

從ッテ以下ノ quasi-field ノ場合モソノ点ハ大丈夫デアル。

次ニ一寸注意シテ置キタイノハ我々ノ興味ハスベテPガソノcenterニ對シテ無限階デアル場合ニアルコトデアル、有限階ナラバ万事殆ンドtrivialニナルノデアル。

サテ、PノcenterヲZトシ, $k = \Phi \cap Z$トオク. 更ニkノ第一種有限次拡大k^*ヲ考ヘ、kヲ基礎体トシテ、ソレヲk^*マデ拡張スルコトニヨツテP, Φカラ得ラレルP_{k^*}, Φ_{k^*}ヲソレゾレP^*, Φ^*デアラハスコトニスル。P/ΦノautomorphismハP^*/Φ^*ノソレト考ヘラレル。((P^*, Φ^*ハモハヤquasi-fieldデハ一般ニハナイ. 然シsemi-simple ringデアル)

補助定理（Speiserノ定理ノ拡張）$\mathfrak{G}$ノ各元SニP^*ニオケルregular matrix C_Sガ對應シテキテ且ツ

(1) $C_S C_T^S = C_{TS}$

ヲ満シテヰルトスル。然ラバ$C_S = A^{-1}A^S$トナル様ナP^*ニオケルregular matrix Aガ存在スル。

証明ハP^*/Φ^*デナクP/Φノ場合ニハJacobsonニヤツテアリ、我々ノ場合モ容易ニ同様ニ証明サレル. 即チ（少シクJacobsonノトハ異ッタ云ヒ方デ述ベレバ）

$$u_E, u_S, \cdots\cdots, u_T$$

ナル元ヲ新タニ導入シテcrossed product

$$\mathfrak{r} = u_E P + u_S P + \cdots\cdots + u_T P$$

ヲ考ヘル。タダシコヽニ

$$u_S \eta^S = \eta u_S \quad (\eta \in \mathfrak{P}), \quad u_S u_T = u_{ST}.$$

シカラバ．コレハ simple ring ニナル（Jacobson 参照）、シカモソノ center ガ k デアルコトハ明カデアル。今ソレヲ k^* マデ拡張スレバ結局ソレハ

$$\mathfrak{r}_{k^*} = \mathfrak{r}^* = u_E P^* + u_S P^* + \cdots\cdots + u_T P^*$$

ナル crossed product ニ外ナラヌ。故ニ $\mathfrak{r}^*$ モ simple ring デアル．他方関係(1)ヲミタス C_S ガ與ヘラレタコトハ、ソノ次數 r トスレバ

$$V = v_1 P^* + v_2 P^* + \cdots\cdots + v_r P^*$$

ナル vector space ニオイテ u_S ニハ (C_S, S) ナル semi-linear transf.， $\eta \in P^*$ ニハ $v \to v\eta$ ナル transf. ヲ對應サセルコトニヨッテ、V ガ $\mathfrak{r}^*$ ノ右加群ニナル事デアル。

シカルニ simple ring $\mathfrak{r}^*$ ノ右加群ハ單ニ $\mathfrak{r}^*$ ノ center k^* ニ對スル behavior デキマル．ヨッテ今 $\{C_S\}$ ノカハリニ $\{E\}$ ヲトッタトキノ加群 V_1 ヲ考ヘルト k^* ノ元ニハ同ジニ behave スル．故ニ V ト V_1 ハ作用同型、スナハチ

$$C_S = A^{-1} E A^S = A^{-1} A^S$$

ナル regular matrix A ガ存在スル。

<u>定理ノ証明</u>：

上ノ k^* ヲ適當ニトッテ有限群 $\mathfrak{g}$ ノ absolutely irred. ナ表現ガミナ k^* ノ中ニアル様ニスル．（以下簡單

ノタメ Of ノ order n ハ体ノ標数ガ割レナイトスル。〔割レル場合ニツイテハ前述拙著ヲ参照サレタイ〕。我々ノ関心ハ今ムシロ comm. ⟶ non-comm. ニアルノダカラ)。ソシテ、ソノ様ナ k^* ニオケル irred. 表現 $S \to U_S$ ヲトル。

シカラバ $U_S U_T = U_{ST}$, 即チ $U'_T U'_S = U'_{ST}$ デアル。(ダッシユハ transposition)。シカルニ、コレハ関係 (1) ノ special case デアル。故ニ regular matrix A in P^* ガアッテ

$$U'_S = A^{-1} A^S \qquad \text{即チ} \qquad A^S = A\, U'_S$$

デアル。即チ $A = (a_{ij})$ トスレバ

$$(2) \quad (a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{ir})^S = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{ir})\, U'_S$$

従ッテ，マタ

$$(3) \quad \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{ir} \end{pmatrix}^S = U_S \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{ir} \end{pmatrix}$$

デアル ((2) カラ (3) ヲ出スノニ U_S ガ k^* ノ行列ナルコトガ使ッテアル)。

今 r^2 ノ個ノ P^* ノ元 a_{ij} ガ Φ^* ニ対シテ左側デ一次独立ノコトヲ云フ。

假ニ

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \varphi_{ij}\, a_{ij} = 0 \qquad (\varphi_{ij} \in \Phi^*)$$

トスル。

他方 $U_E, U_R, \cdots\cdots U_T$ ノ K^* ニ於ケル適當ナ linear comb. ヲツクレバ任意ノ k, l ニ對シテ行列單位 ε_{kl} ガ得ラレル. ヨツテ今 ε_{11} ニナルノヲトリ、ソレニ相當スル $E, R, \cdots\cdots, T$ ノ lin. comb. ヲ a_{ij} ニホドコセバ (2) 又ハ (3) ニヨリ

$$a_{i1} \to a_{i1}, \quad a_{ij} \to 0 \qquad (j \neq 0)$$

故ニ (4) カラ

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{r} \varphi_{i1}\, a_{i1} = 0$$

トナル. 次ニ ε_{1j} ニ相當スルノヲホドコセバ(5)カラ

$$\sum_{i=1}^{r} \varphi_{i1}\, a_{ij} = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, r)$$

トナル。即チ

$$(\varphi_{11}, \varphi_{21}, \cdots\cdots, \varphi_{r1})\, A = 0$$

デアル. 然ルニ A ハ regular ダカラ $\varphi_{11}, \cdots\cdots, \varphi_{r1} = 0$. 同樣ニシテ他ノ φ モミナ 0. 即チ a_{ij} ハ<u>左側デ</u> Φ^* ニ對シテ一次独立デアル。

ヨツテ a_{ij} デ張ラレタ Φ^* 一左加群

$$\mathfrak{m} = \Phi^* a_{11} + \cdots\cdots + \Phi^* a_{1r} + \Phi^* a_{21} + \cdots\cdots + \Phi^* a_{rr}$$

ヲ考ヘル. シカルトキ r 個ヅヽマトメテミレバ各々ガ $\mathfrak{g}$ ノ (右) 加群デソレニヨル表現ガ U_S ニナルコトヲ (3) ハ示シテヰル. スナハチ $\mathfrak{m}$ ハ U_S ヲ define スル如キ Φ^* 一 $\mathfrak{g}$ -

加群丁度r個ノ直和デアル。

以上ノコトハアラユルirredナ表現ニツイテ云ヘル。ヨッテΦ^*-$\mathfrak{g}$-加群P^*ニヨル$\mathfrak{g}$ノ表現ハ正規表現ヲ含ミ従ッテ次數ヲ考ヘレバ一致スルコトニナル。

P^*ヨリΦ-$\mathfrak{g}$-加群Pニウツルノハ容易デアル。(Krull-Remakノ定理ニヨル)

群環ガsemi-simpleノ場合ニハ$\mathfrak{U}_S$ヲirredノカハリニ、正規表現ノアル直既約成分ヲトリ、ソノ時r^2個ノa_{ij}スベテガナク、適當ナt個ノ横行(タダシtハU_Sニ對應スル(Brauer-Nesbittノ意味デ)既約表現ノ次數)ニ屬スルa_{ij}ガ一次独立ノコトガ云ヘルノデアル。委シクハ省ク。(ソノ既約成分ガ最大直可約成分ナルコトヲ使用スルノデアル)

<u>附記I</u>: 上ノ証明デハ$b^E, b^R, \ldots\ldots, b^T$ナル<u>左</u>basisノ存在ヲ証明シタ。同様ニ同ジ形ノ<u>右</u>basisノ存在ガワカル。然シ同時ニ左右ノbasisニナルヤウニ出來ルノダラウカ?

<u>附記II</u>: 上記ニSpeiserノ定理ノ拡張ヲ使用シタ、我々ノ目的ニハコノ形デヨイノダガ、定理自身トシテハ

$$(6)\qquad C_S\, C_T^S\, C_{TS}^{-1} = D_S\, D_T^S\, D_{TS}^{-1}$$

ナラバ$C_S = A^{-1} D_S A^S$ニナル、ノ形ニ云ヒタイノデアル。事實comm.ナPデハ云ヘル事ハヨク知ラレテヰル。シカシソノ場合ノ証明ハ$A = \sum_S \rho^S D_S^{-1} C_S$ナル形ノ行列ヲ考ヘ、

コレガ regular ニナルヤウニ ρ ヲキメルノデアル。
(大島: 數學 20 参照). シカシコレデハ ρ^S ガ (6) ト commutative デナイト駄目デ旨ク我々ノ場合ニ行カナイ.
然ラバ, 構造論的ナ証明トナルト、ソレニハ上記ノ crossed product γ ニ相当スル ring ガ手ニ負ヘルモノデナイト困ル, 即チ factor set (6) ガ適当デ γ ニ相当スル ring ガ simple デナクトモ, semi-simple 或ハソウデナクトモ uni-serial ring 乃至ハ generalized uni-serial ring (Frobeniusean algebras II, 参照). 等ナラソレノ Module ノ構造ガワカルカラ出来ル. シカシ gen. uni-serial ring ガ現在 (有限) moduli ノ構造ノ Über-sicht ノ得ラレル最モ一般ノ ring ノ様ニ思ハレ、ソレ以外ノ一般ノ ring ノ場合ダトドウモ旨ク行カナイ。何カ旨イ工夫ガアルト出来ルノダラウト思フノダガ、御教示ヲ得レバ幸甚デアル。