884. Teilweise geordnete Algebra

中野 秀五郎（東大）

之レハ近イ間ニ出版サレル論文ノ紹介デアル。Freudenthal ガ Teilweise geordnete Moduln 即チ semi-ordered modul ニ於ケル Spektraltheorie ヲ作ッタ。此レハ F. Riesz ノ functional ニ於ケル其レノ抽象化デアル。又同年ノ 1936 年其レト独立シテ Steen ガ semi-ordered ring ニ於ケル Spektraltheorie ヲ組立テタ。此レハ Hilbert space ニ於ケル Hermitean Operator ノ Spektraltheorie ノ抽象化デアル。此ノ論文ハ以上二ツノ理論ヲ一ツニマトメルノガ其目的デアル。最近（本年五月）Vulich ガ semi-ordered modul ノ Element ノ間ニ Product ヲ define シテ、Freudenthal ノ modul ト Steen ノ ring ノ間ノ関係ヲ研究シタ。Vulich ノ結果ハ此ノ論文ニ含マレルコトヽナル。

Teilweise geordneter Modul $\mathfrak{M}$ トハ次ノ如キモノナリ。此処ニ $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$ ハ實數 $a, b, c, \cdots\cdots$ ハ $\mathfrak{M}$ ノ Element トスル。

1) $a, b \in \mathfrak{M}$ ナラバ $\alpha a + \beta b \in \mathfrak{M}$. 然カモ modul ヲナス。

2) $\mathfrak{M}$ ハ semi-ordered ナリ. 即チ $\mathfrak{M}$ ノ或ル二ツノ Element ノ間ニハ order ガアッテ

$a > b$ & $b > c$ ナラバ $a > c$,

$a \not> a$

ナルモノトス。從ツテ, $a \leqq b$, & $a \geqq b$ ナラバ $a = b$ デアル。

3) $a, b \in \mathfrak{M}$ ニ對シ $c = a \frown b$ ガ $\mathfrak{M}$ ニ存在ス。即チ $a \geqq c$, $b \geqq c$ ニシテ、$a \geqq x$, $b \geqq x$ ナル x ニ對シ常ニ $c \geqq x$ ナルモノトス。

4) $a > b$ ナラバ $a + c > b + c$

5) $a > 0$, $\lambda > 0$ ナラバ $\lambda a > 0$

6) $a > 0$ ナラバ $-a < 0$

7) $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots$, $a_\nu \geqq 0$ ナラバ $c = \lim_{\nu \to \infty} a_\nu$ ガ存在ス。即チ $a_\nu \geqq c$ ニシテ $a_\nu \geqq x$ ナル x ニ對シテハ常ニ $c \geqq x$ トス。

以上ガ Teilweise geordneter Modul ノ定義トスル。此レハ Freudenthal ト比較スレバ, 單ニ $a \frown 1 = 0$ ナラバ $a = 0$ ナルガ如キ Element 1 ノ存在トナル公理ト Converge ノ公理ヲ 7) ノミトシタ点ガ弱クナッテキル。然シ Converge ニ關シテハ公理ノ少ナイノガ必ズシモ一般デハナイガ、此処デ limit ヲ constructive ニ定義スル方法ヲ取ル。3) ハ又次ノ 3') ト同値デアル。

3') $a, b \in \mathfrak{M}$ ニ對シ $c = a \smile b$ ガ存在ス。即チ $c \geqq a, \geqq b$ ニシテ $x \geqq a, \geqq b$ ナル x ニ對シ常ニ $x \geqq c$

$a_+ = a \smile 0$, $a_- = (-a)_+$, $|a| = a_+ + a_-$ ト

置リコトハ實數ト同様デアル。

一般ノ limit ハ次ノ如ク定義スル。

$l_1 \geqq l_2 \geqq \cdots\cdots$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} l_\nu = 0$ ナル適當ナ Element ニ對シ

$$|x_\nu - x_0| \leqq l_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナレバ

$$\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x_0$$

ナリトス。此ノ定義ハ Steen ニヨル $\overline{\lim}\, x_n$, $\underline{\lim}\, x_n$ ヨリスル定義ト同一ノモノトナルガ，後ニ示ス如ク，我々ノ方法ノ方ガ此ノ Konvergence (strong, uniformly) ヲ定義スルノニ便利デアル。無論 Konvergence ニ関シテ實數ト同様ナ定理ガ証明デキル。

例ヘバ Cauchy ノ theorem ニ相當スルモノモ得ラレル。

Modul ニ於ケル Spektraltheorie ヲ作ルノデアルガ、Freudenthal ト異ナル方法デ進ム。即チ先ヅ最初ニ Projection ヲ Freudenthal ノ其レヨリ一般ノ形デ定義スル。

$a, b \in \mathfrak{M}$ ニ對シ $|a| \frown |b| = 0$ ナルトキ a ト b トハ orthogonal ト定義ス。次ニ $x, p \in \mathfrak{M}$ ニ對シ，$x = h + k$ トシ、k ト p トハ orthogonal, h ハ p ト orthogonal ナ総テノ Element ト orthogonal ナヤウニ x ヲ表ハスコトガ出来ル。此ノ表ハシ方ハ然カモ唯一通リデアル。此ノ h ヲ x ノ p ヘノ Projection ト呼