883. Pythagorian ring ニ付イテ，III

吉田　耕作（阪大）

Pythagorian ring ノ公理，特ニ "positiveness ノ公理" ガ外見上，最近 announce サレタ M. Stone[1] ノソレヨリ強ク見エナイカト三村氏ニ御注意ヲ頂イタノデ，此機會ニ Stone トノ關係特ニ P.R. ガ Stone ノヲ含ムコト等述ベテヲキタイ。

Stone ノ公理及ビ結果ハ後ニ述ベルコトニシテ先ヅ次ノ点ヲ強調シトキマセウ。Stone ハ "boundedness" —— 後述 —— ヲ假定シテルタメニ考ヘテル ring ガ特ニ "linear metric space" ニナル。從ツテコノ "conjugate space" ガ使ヘル。ソウスレバ ring ノ "具体的ナ表現" ハ ring ノ要素各々ヲ "適當ニトッタ conjugate space ノ部分集合" ノ上ノ函數ト考ヘルコトニヨッテ得ラレル。此ノ principle ハ，モトモト Banach ト Mazur ガ "任意ノ可分ナ Banach space ハ Banach space (C) ノ部分線狀空間ト表ハセル" ニ用ヒタモノデアッテ，最近角谷君ヤ Russian school ノ人々ガ之レニ semi-order トカ其ノ他種々ノ條件ヲ附シテ具体的表現ノ有用ナ武器ニ使ヘルコトヲ示シタノデアル。此ノ鮮カナ principle ガアル以上，"具表" ノ問題ハ <u>linear metric space</u> ノトキハ spectral theorem ヲ離レテ論ジラレルト云フ

---

(1) Proc. Nat. Acad., 26(1940), 280—283

点デ易シクナッテ了ッタ譯デアル。——— 表現シテ了ヘバ(例ヘバ (C) ノ場合ハ駄目ナコト明カダガ) spectral theorem ヲ出スノハ階段函數ノ多項式近似ニモッテユケルトキハ明カニワケハナイ。(或ハ"semi-ordered modul"ノトキハ多項式ハ使ヘナイガ, H. Freudenthal 流ニヤレル。此ノ場合ハ結局"具表"ト operational calculus トハ別ノ話ニナル。)

之レガ又 Stone ノ行キ方デモアルラシイ。証明シテナイノデハッキリワカリマセンガ。序デナガラ最近 C. R. URSS ニ出タ Krein[(1)] ノ論文"内部的性質ニヨル (C) ノ特徴付ケ"モ此ノ方針ラシク, ソンナラ既ニ角谷君ノ得タ結果"學士院記事 16 (1940), 63—67"ニ一致スルワケデアリマス。勿論 Krein ハ角谷君ノ論文ヲ知ラナイノデアリマセウガ。

以上ノ次第デ linear metric デナイ場合, 例ヘバ"可測函數全体ノ空間ノ特徴付ケ"等ノ場合ハ話ガ別ニナル。Pythagorian ring ハ metric axiom (topological axiom サヘモ) ヲ假定セズニ云ハバ ring-lattice 論的ニ spectral theorem ト"可測函數ノ空間"トヲ取扱ヒタイタメニ考ヘタ訳デアリマシタ。

§1. Pythagorian ring ノ公理

談話 873 ニ述ベタ公理ハ一寸誤リモアリ, 又談話 875

(1) C. R. URSS, 27 (1940), 427—430

ニ述ベタ公理 iv) ノ廃棄ト云フ所デ述ベタ所モ筆ガ辷リスギタヤウデス[1]カラ，今一度公理ヲ訂正シナガラ述ベテオキマス。談話 873 ニ於ケルヨリ *practical* ニ使ヒヨイ形ニナッテル積リデス。（誤リヲ正シタ所ヲ除イテハ両者同等[2]）。但シ公理群ガモット簡単ニナルコトハ望マシイト思ヒマスガ。

次ノ公理群ヲ満足スル環 R ヲ *Pyth. ring* ト云フ。

(A−1) R ハ可換ナ環デアリ単位 I ヲ含ミ且ツ實數体ヲ係數トスル。（R ノ元ヲ X, Y 等実數ヲ α, β 等デ表ハス）

(A−2) $X^2 = 0$ ナラ $X = 0$

(A−3) 零デナイ X ガ $X = Y^2$ ノ形ナルトキ X ヲ " 正ノ元 " ト呼ブ。然ラバ正ノ元ト " 非負ノ元 " トノ和ハ正デアル。即チ $X \neq 0$ 又ハ $Y \neq 0$ ナラバ $Z \neq 0$ ガ存在シテ $X^2 + Y^2 = Z^2$.

(A−4) *semi-order* $X > Y$（$X - Y > 0$ ノコト）ニヨリ，任意ノ X ニ對シ X ト 0 トノ *least upper bound* $\sup(X, 0)$ ガ存在スル。

(A−5) $X^+ = \sup(X, 0)$, $\sup(-X, 0) = X^-$ トヲケバ全テノ X ニ對シ $X^+ \cdot X^- = 0$.

(A−6) 点列 $\{X_n\}$ ガ $X_n \leqq X_{n+1}$ 且ツ或ル Y ニヨリ $X_n \leqq Y$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ナラバ *least*

---

(1) 廃棄デキルノハ加法ニ関スル部分丈デ乗法ニ関スル方ハ公理 iv) 必要デス。

(2) 証明容易デス。

upper bound $\sup_{n \geqq 1} X_n$ 存在ス.

(A－7) $A > 0$, $X_i \geqq 0$ $X_{i+1} \geqq X_i$ 且ツ $\sup_{i \geqq 1} X_i$ 存在スレバ $A \cdot \sup X_i = \sup(A \cdot X_i)$

(A－8) $X_i \cdot X_j = 0$ $(i \neq j)$ ナラバ

$$\sum_{i=1}^{\infty} X_i = \sup_{n \geqq 1} \inf_{m \geqq n} \sum_{i=1}^{m} X_i = \inf_{n \geqq 1} \sup_{m \geqq n} \sum_{i=1}^{m} X_i$$

$\in R$

§2. Stone 公理ト結果

次ノ公理群ヲ満足スル環ヲ考ヘル. ―― Stone ニヨレバ斯ル環ハアル bicompact 空間ノ上ノ"有界且 Borel 可測函数ノ作ル環"トシテ具体的ニ表現サレル。

(B－1), (B－2) 夫々 (A－1), (A－2) ト同ジ。

(B－3) R ノ幾ツカノ元ヲ"正ノ元"ト呼ブ。X ガ正ノ元トルコトヲ示スノニ $X > 0$ ト記ス. 然ラバ $X > 0$, $Y > 0$ ナルトキ $X + Y > 0$, $X \cdot Y \geqq 0$, $\alpha X \gtreqless 0$ (α ハ実数 $\gtreqless 0$). 又 $I > 0$, 0 (零) ハ正デナイ. 且ツ $X \neq 0$ ナラ $X^2 > 0$.

(B－4) 任意ノ X ニ對シ実数 α, β $(\geqq 0)$ ガ定ツテ $-\beta I < X < \alpha I$ (1) ― "boundedness axiom"

---

(1) $X > Y$ ハ $X - Y > 0$ ノコト. コノ公理ノタメニ環ガ linear metric space ニナル. 即チ $\|X\|$ ＝上ノ如キ α, β ノ g.l.b. トトレバヨイ。

(B−5)　(A−6)ト同ジ。

§3. Stone ノ ring ノ Pyth. ring ナルコト ノ証

1) $X>0$ トスルトキ $X=Y^2$ ト書ケルコトノ証．

$X<I$ ト假定シテヨイ（（B−4）ニヨル）．ヨッテ operator theory ノ常套手段デ $\sqrt{1-(1-\alpha)}$ ノ冪級数展開ニ於テ $\alpha=X$ ヲ代入シテ $X^{\frac{1}{2}}\geqq 0$ ヲ得テ $(X^{\frac{1}{2}})^2=X$。

2) （A−4）ヲ出スコト．―― 同時ニ（A−5）モ出ス．

上カラ $|X|=(X^2)^{\frac{1}{2}}$ ガ定マリ；$|X|\geqq X,\ -X$ ナコト容易ニワカル．$|X|=\sup(X,-X)$ ナコトハ $X'\geqq X, -X$ トスルト $X'^2\geqq X^2$ ヲ得ルコトカラワカル．何者次ニ示スヤウニ $0<X,\ 0<Y,\ X^2<Y^2$ カラ $X<Y$ ガ出ルカラ。

$\left(X^{+}=\dfrac{|X|+X}{2},\quad X^{-}=\dfrac{|X|-X}{2}\right.$ トヲケバ

$X=X^{+}-X^{-}$, $|X|=X^{+}+X^{-}$ 且ツ $X^{+}\cdot X^{-}=0$
（$X^2=|X|^2$ ニヨル）

故ニ談話 875 $\boxed{\text{公理群カラノ結果 1) ノ訂正}}$ ト同様ニシテ $0<X,\ 0<Y,\ X^2<Y^2$ ヨリ $X<Y$ 出ル）。

従ッテ $|X|=\sup(X,-X)=\sup(X,-X,0)$ ヲ得テ上ノ $X^{+}=\sup(X,0)$, $X^{-}=\sup(-X,0)$

ナルコトモワカッタ。

3) (A－1)ヲ出スコト。

形ヲカヘテ $A>0$, $X_i \geqq 0$, $X_{i+1} \leqq X_i$ 且ツ greatest lower bound $\inf_{i \geqq 1} X_i = 0$ ノトキ。

$$A \cdot \inf (X_i) = \inf (A \cdot X_i)$$

ヲ証明シヤウ。左辺 0 ダカラ右辺 0 ナコトヲ示セバ充分。

所が(B－4)ニヨリ $A < \alpha I$ ナル $\alpha > 0$ ガアルカラ明カ。

4) (A－8)ハ不要。

何者、Stone ノ ring ハ(A－1)乃至(A－7)ヲ満足スルカラ，談話 873，875 ニヨリ"可測函数環"トシテ具体的ニ表現出来ル。然モ(B－4)ガアルカラ"有界可測函数ノ環"トシテ(A－8)ガ必要ダッタノハ有界デナイ函数ガ登場シテ来ルタメニデアルカラ。

以上ニヨッテ"boundedness"ガドンナニ強イ公理デアルカゞワカッタ。勿論 Stone ノ公理群ハソノ代リ使ヒ易イ。特ニ Hilbert 空間ノ有界ナ Hermite 作用素 H ノ spectral theorem ヲ出ストキニハ，H カラ生成サレル環ガ(A－1)乃至(A－7)ヲ充タスコトヲ試スヨリ，(B－1)乃至(B－5)ヲ満足スルコトヲ試ス方ガズット容易デアル。併シ上ニ示シタ如ク Stone ノ公理カラ

(A'—6) 乃至 (A—7) ノ出テ來ルコトヲ証明スルコトモ
簡單ダカラ —— $\sqrt{(1-(1-t^2))}$ ヲ使フ丈ケ ——
"boundedness" ヲ assume セズ有界デナイ operator
ヤ函數ヲモ含ムヤウニシタ方ガ一般デヨリハアルマイカ。