876. Stable distribution ヲモツ Markoff Process.

深宮　政範（阪大）

Rヲ"measurable"ナ集合トシ，ソノ凡テノ"measurable"ナ subsets ノ Borel family ヲ $B(R)$ トスル。点 X ガ Simple Markoff Process ニヨツテ unit time ノ後 $E \varepsilon B(R)$ ニ移サレル transition probability ヲ $P(X,E)$ デ表ハス、茲デ次ノコトハ仮定サレル。

1) Xヲ fix シタトキ，$P(x,E)$ ハ $E \varepsilon B(R)$ ニ関シテ complete additive

2) Eヲ fix シタ時，$P(X,E)$ ハ"measurable"

次ニ

$$P^{(1)}(x,E)=P(x,E),\quad P^{(n)}(x,E)=\int_R P^{(n-1)}(x,dy)P(y,E)$$

ト定メル．茲ニ $P^{(n)}(x,E) \geqq 0,\quad P^{(n)}(x,R) \equiv 1$

次ニ $B(R)$ デ定義サレタ non-negative set-function $\varphi(E)$ ガ與ヘラレテ

1) $\varphi(E)$ ハ complete additive for $E \in B(R)$,
$\varphi(R)=1$.

2) $\int_R \varphi(dx) P(X, E) = \varphi(E)$ for any $E \in B(R)$

3) $B(R)$ ハ separable

トスル. 此ノトキ吉田氏ニ從ヘバ, Markoff Process $P(x, E)$ ハ stable distribution $\varphi(E)$ ヲモツト云フ。

吉田氏[1]ハ此ノ Markoff Process ニツイテ, ソノ重要ナルコト及ビ基礎定理 (Ergodic theorem. 下参照)

ヲ論ゼラレ, 又角谷氏モ之レヲ研究サレタ。

吉田氏ノ證明サレタ定理ハ L^1 ノ mean ergodic theorem デ, 之ハ次ノ様ニ述ベラレル。

Theorem. A 若シ $\int_R |f(x)| \varphi(dx) < \infty$ ナラバ

$$\lim_{N\to\infty}\int_R \left| \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} f_n(x) - f^*(x) \right| \varphi(dx) = 0$$

ナル如キ $f^*(x) \in L^1_\varphi$ が存在スル. 但シ

$$f_n(x) = \int_R P^{(n-1)}(x, dy) f(y), \quad f_1(x) = f(x)$$

$$n = 2, 3, 4, \text{-----}$$

之レニ就イテハ $|f(x)| \leqq M$ (for all x) デアレバ $\{f_n(x)\}$ ハ uniformly integrable デアルコトハ

---

(1) 學士院紀要, XVI (1940), No. 3 Paper 12°.
仝 Paper 13°.

直グニ分ルデセウ。

角谷氏ノ証明サレタ定理ハ almost everywhere ノ意味ノ（Birkoff 型ノ）ergodic theorem ノ一ツデ

Theorem. B　凡テノ X ニ對シテ $|f(x)|\leqq M$ ナル M ガアレバ φ-measure 0 ノ集合ヲ外ニテ

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}f_n(x)=f^*(x)$$

ハ存在シテ $f^*(x)\varepsilon L_\varphi^1$

勿論 stable distribution $\varphi(E)$ ヲモツ Markoff Process $P(x,E)$ ガドンナ條件ヲ満足スルトキ L_φ デ φ-almost everywhere ノ Ergodic Theorem ガ成立スルカガ分ルコトガ尤モ望マシイノデアル（夫レハ Banach space ノ operators ニ就イテノ ergodic theorem デ operator ニダケ條件ヲ附シタ吉田，角谷両氏ノ定理ガ一般デアッタ）

茲デハ夫レニ立チ入ラズニ定理 B ガ"有界"デナイ場合デモ成立スルコトヲ注意シタイ。簡單ノタメ角谷君ノ論文ノ記号ソノマヽ茲ニ借用スル。

1°. Infinite Product Space $R^*=(\cdots\cdots,\overset{(-1)}{R},\overset{(0)}{R},\overset{(1)}{R},\cdots)=$

$$\varphi^*(E^*)=\int_{E_m}\int_{E_{m+1}}\cdots\cdots\int_{E_n}\varphi(dt_m)P(t_m,dt_{m+1})P(t_{m+1},dt_{m+2})\cdots\cdots P(t_{n-1},dt_n),$$

$$E^*=(\cdots\cdots R,R,E_m,E_{m+1},\cdots\cdots,E_n,R,R,\cdots),$$

$$-\infty < m \leqq n < \infty$$

ニ依ツテ measure ヲ附ケ，又別ニ

$$\varphi^*_{t_0}(E^*) = \int_{E_m}\int_{E_{m+1}}\cdots\cdots\int_{E_n} P^{(m)}(t_0, dt_m)\, P(t_m, dt_{m+1})\cdots$$
$$\cdots P(t_{n-1}, dt_n)$$

但シ $E^* = (\cdots\cdots R, E_m, E_{m+1}, \ldots\ldots, E_n, R, \cdots\cdots)$,

$$1 \leqq m \leqq n$$

ヲ考ヘルコトニスル，然ルトキハ $R^*(\varphi^*(E^*))$ デハ $T t^* = t^{*\prime}$, $t^* = (t^{(i)}_i)$, $t^{*\prime} = (t^{(i)}_{i+1})$ ハ measure(φ^*) preserving ナ変換トナッテ茲ニ Wiener ノ Ergodic Theorem ガ成立ツコト及ビ $f(t^*) \geqq 0$, $\int f(t^*)\varphi^*(dt^*) < \infty$ ナラバ φ-measure 0 ノ t_0 ノ集合ヲ除キ $\int \varphi^*_{t_0}(dt^*) f(t^*) < \infty$ デアルコトノ二ツノ点カラコノ定理ガ次ノ假定ノ下デ成立ツヤウデアル。

$$\int |f(t_0)|^p \varphi(dt_0) < \infty \quad (p > 1)$$

又ハ $\int |f(t_0)| \overset{+}{\log} |f(t_0)| \varphi(dt_0) < \infty$

$\boxed{\text{御断リ}}$

此ノ注意ハ既ニ吉田，角谷両氏ガ知ッテ居ラレタノデアッテ，小生ハ夫レヲ知ラズニ考ヘマシタノデ此ノ点オ断リ致シマス。

$1°$. $f^*(t^*) = f(t_0)$, $t_0 = t_0(t^*)$ ナラバ

$\left(\max_{1 \leqq K \leqq N} \frac{1}{K} \sum_{n=1}^{K} f(t_n) > \alpha\right)$ ナル t^*–集合ノ measure

(φ^*) ハ $< \frac{2}{\alpha} \int_{|f^*(t^*)| > \frac{\alpha}{2}} |f^*(t^*)| \varphi^*(dt^*)$

$$f^*(t^*) = f(t_0), \quad \underset{t^*}{E}(r < f^*(t^*) < s) = \underset{t^*}{E}(\underline{r < f}(t_0) < s, \; t_0 = t_0(t^*))$$

今 $\underset{t_0}{E}(r < f(t_0) < s) = F$ トスレバ

$$\underset{t^*}{E}(r < f^*(t^*) < s) = \underset{t^*}{E}(t_0(t^*) \in F)$$

従ッテソノ φ^*–measure ハ $= \int_F \varphi(dt_0) = \varphi(F)$

$$\therefore \frac{2}{\alpha} \int_{|f^*(t^*)| > \frac{\alpha}{2}} |f^*(t^*)| \varphi^*(dt^*)$$

$$= \frac{2}{\alpha} \int_{|f(t_0)| > \frac{\alpha}{2}} |f(t_0)| \varphi(dt_0)$$

$2°$. モシ $\int |f(t_0)| \overset{+}{\log} |f(t_0)| \varphi(dt_0) < \infty$ ナラバ

$$\underset{n}{\mathrm{l.u.b}} \left| \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{n} f(t_n) \right| = \bar{f}(t^*),$$

ガ φ^*–measure 0 ノ集合ヲ外イテ有限デ $\int \bar{f}(t^*) \varphi(dt^*) < \infty$

$3°$. $f^*(t^*) \geqq 0$, $\int f^*(t^*) \varphi^*(dt^*) < \infty$ ナラバ

殆ンド凡テ (φ) ノ t_0 ニ對シテ

$$\int f^*(t^*)\,\varphi_{t_0}(dt^*) < \infty,$$

3° ニヨッテ 2° ニ於ケル $\bar{f}(t^*)$ ハ $\varphi_{t_0}(dt^*)$ デ integrable デアルカラ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}\int_{R^*} f(t_n)\,\varphi_{t_0}(dt^*) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n}\int p^{(n)}(t_0,t_n)f(t_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} f_n(t_0) = \text{exists}$$