869 *Operators* ノ *one-parameter Group* ニツイテ

深宮　政範（阪大）

U_t,　$\infty < t < \infty$ ヲ *Banach* 空間 E ヲ E 自身ヘ移ス *isometric* ナ *operators* ノ *one-parametric group* トシマス：即チ

(i) $\|U_t\| = 1$, (ii) $U_t U_s = U_{t+s}$,

(iii) U_t ハ weakly measurable ($f(U_t x)$ ガ凡テノ $x \in E$ 及ビ $f \in \overline{E}$ ニ対シテ t ノ numerical measurable function デアル)(1)

既ニ Stone, von Neumann ニヨッテ E ガ Hilbert 空間デ, U_t ガ unitary operator ナル場合ニツイテカヽル group U_t ノ analytical representation ガ論ゼラレテ居リマス。(Stone, Annals of Math., 33 (1931), pp643—648; von Neumann, Annals of Math., 33(1931), pp 567—573.

最近 I. Gelfand ガ C. R. U. R. S. S. 25(1939) デコノ問題ヲ論ジテ居リマス。Gelfand ノ方法ハ群 U_t ノ "Differentiation" ヲ用フルトイフ所ガ要点デアル様ニ思ハレル。(2) 然シ同ジ結果ハ "Differentiation" ノ代リニ "Integration" ヲ用フルコトニヨッテ、ヨリ精確ニ出セルコトヲ注意シタイ。

即チ Resolvents ヲ定義スル Stone ノ方法ガソノママ用ヒラレルノデアル。

$$\psi(\tau; z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} e^{-i\lambda\tau} d\lambda \quad (Im(z) \neq 0)$$

---

(1) U_t ガ weakly measurable ナラバ strongly continuous: $t \to t_0$ ナラバ $U_t \to U_{t_0}$ (strongly)

(2) D. S. Nathan, Duke Math. Journ., 1 (1936) ヲ参照サレタイ。

トスレバ

$$\psi(\tau;z)=\begin{cases}0 & \tau>0\\ ie^{-iz\tau} & \tau<0\end{cases}\quad (\mathrm{Im}(z)>0)$$

$$=\begin{cases}-ie^{-iz\tau} & \tau>0\\ 0 & \tau<0\end{cases}\quad (\mathrm{Im}(z)<0)$$

及ビ

$$(z-z')\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\tau;z)\psi(\sigma-\tau;z')d\tau$$

$$=\psi(\sigma;z)-\psi(\sigma;z')$$

今 $x\varepsilon E$, $f\varepsilon\bar{E}$ トシテ

$$F(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t;z)f(U_t x)\,dt \quad (\mathrm{Im}(z)\neq 0)$$

ヲ考ヘルト $F(f)$ ハ $\bar{E}$ ノ上デノ weakly continuous functional デアル。夫レハ次ノ様ニ考ヘレバ容易ニ分ル。

証明スベキコトハ $f_n\to f$ (weakly) ノ時 $F(f_n)\to F(f)$ デアル。$f_n\to f$ (weakly) ナラバ $\|f_n\|\leqq M$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$

従ツテ $\varphi_n(t)=f_n(U_t x)$ ハ有界デ

$$|\varphi_n(t)|\leqq M\cdot\|f\|\cdot\|x\|=M_1,$$

$$\varphi_n(t)\longrightarrow\varphi(t)=f(U_t x)$$

従ツテ

$$\int\psi(t;z)f_n(U_t x)\,dt\to\int\psi(t;z)f(U_t x)\,dt.$$

($\psi(t;z)$ ハ absolutely integrable $(-\infty,\infty)$)

即チ $F(f_n) \longrightarrow F(f)$

依ツテ Banach ノ定理ニヨッテ E ガ Separabe 又ハ regular ナラバ X ニ對シテ $X_z \in E$ ガ存在シテ 凡テノ $f \in \bar{E}$ ニ対シテ

$$F(f)=f(X_z)$$

ガ成立スル．$R_z \cdot X = X_z$ ト定義スレバ茲ニ complex number z ($\mathfrak{Im}(z) \neq 0$) ニ対シテ一ツ宛 operator ガ定マル。（之ハ Hilbert 空間デ Resolvent ト呼バレル．Metric Ring ニ於ケル Resolvent ニツイテハ早ク南雲先生，吉田氏ニヨッテ論ゼラレテキルコトハ周知デアラウ）。

1. R_z ハ E デ定義サレタ linear operator デアル：

$$|f(R_z \cdot x)| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(U_t x)| \cdot |\psi(t;z)|\, dt$$

$$\leqq \frac{\|f\| \cdot \|x\|}{|\mathfrak{Im}(z)|},$$

$$\|R_z\| \leqq \frac{1}{|\mathfrak{Im}(z)|}$$

2. $(z-z')R_z R_{z'} = R_z - R_{z'}$．($\mathfrak{Im}(z) \neq 0$, $\mathfrak{Im}(z') \neq 0$).

何トナレバ

$$f(R_z R_{z'} x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t;z') f(U_t R_z x)\, dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}\psi(s;z)\psi(t;z')f(U_{t+s}X)ds^{(2)}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(U_tX)dt\int_{-\infty}^{\infty}\psi(s;z)\psi(t-s;z')ds$$

$$(z-z')f(R_zR_{z'}X)=\int_{-\infty}^{\infty}f(U_tX)(\psi(t;z)-\psi(t;z'))dt$$

故ニ　$(z-z')R_zR_{z'}=R_z-R_{z'}$

3. アル z_1, $(\mathcal{I}m(z_1)\neq 0)$ ニ対シテ $R_{z_1}X=0$ ナラバ

$X=0$

上ノ式ヲ用ヒテ $R_{z_1}X=0$ ナラバ $R_zX=0$ ガ凡テノ

z $(\mathcal{I}m(z)\neq 0)$ ニ対シテ成立スルカラ 特ニ

$-\infty<\xi<\infty$ ニ対シテ

$$0=f(R_zX)-f(R_{\bar z}X)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(U_tX)e^{-\eta|t|}e^{-i\xi t}dt,$$

$z=\xi+i\eta$, $\eta\neq 0$

依ッテ $f(U_tX)=0$ ガ凡テノ（$f(U_tX)$ ハ連続!）

t ニ対シテ成立ツ. 特ニ $t=0$ トスレバ $f(X)=0$,

$f\in\bar{E}$ ハ任意デアルカラ $X=0$

4. operator A.

---

(2) 茲デ $U_tR_z=R_zU_t$ 即チ U_t ト integration トガ commute スルコトヲ假定スル必要ハナイ。

コノ貴重ナ注意ハ三村氏カラ受ケタ。

z_0 ヲ $\mathrm{Im}(z_0)\neq 0$ ナル一ツノ complex number トシ，$y=R_{z_0}x$（x ハ E ノ任意ノ point）ヲ $x+z_0\cdot R_{z_0}x$ ニ對應セシメル operator ヲ A トスル：

$$y=R_{z_0}x,\quad Ay=x+z_0R_{z_0}x.$$

x ガ E 全体ヲ動クトキ $y=R_{z_0}x$ ハ E デ dense set ヲ作ル．従ツテ A ノ domain $D(A)$ ハ E デ dense デアル．何トナレバ $f\in\bar{E}$，$y\in D(A)$ ニ対シテ $f(y)=0$ トスレバ

$$f(y)=f(R_{z_0}x)=0,\quad x\in E;$$

特ニ $\mathrm{Im}(z_0)>0$ ノトキハ

$$0=f(R_{z_0}U_tx)=i\int_{-\infty}^{0}e^{iz_0\tau}f(U_\tau U_tx)\,d\tau$$

$$=ie^{-iz_0t}\int_{-\infty}^{t}e^{iz_0s}f(U_sx)\,ds$$

ガ凡テノ t ニ對シテ成立ツカラ $f(U_tx)=0$ 特ニ

$$f(x)=0\quad(x\in E).$$

依ツテ $f\equiv 0$

又，明カニ A ハ additive.

5. $R_z(A-zI)y=(A-zI)R_zy=y.\quad(y=R_{z_0}x)$

簡單ナ計算デ，

$$R_z(A-zI)y=R_z(x+z_0R_{z_0}x-zR_{z_0}x),$$

$$(A-zI)R_zy=A(R_{z_0}(R_zx))-zR_zR_{z_0}x$$

$$=R_zx+z_0R_{z_0}R_zx-zR_zR_{z_0}x$$

$$R_z(A-zI)y=(A-zI)R_zy=R_zx+(z_0-z)R_zR_{z_0}x$$

$= R_z X + (R_{z_0} X - R_z X) = R_{z_0} X = y.$

ニヨッテ分ル.

6. A closed operator デアル。何トナレバ

$y_n = R_{z_0} x_n \to y,\quad A y_n = x_n + z_0 R_{z_0} x_n \to \bar{y}$

トスレバ $x_n = A y_n - z_0 y_n$ デアルカラ $x_n \to \bar{x}$,

従ッテ $y = R_{z_0} \bar{x}$, $A y_n = x_n + z_0 R_{z_0} x_n \to \bar{x} + z_0 R_{z_0} \bar{x}$

$= Ay.$

依ッテ A ハ closed.

7. A ノ定義ガ個々ノ z_0 ニ実際ハ depend シナイコトヲ示シタイ。之レニハ D(A) ガソウデアルコトヲ云ヘバヨイ. 何トナレバ $z_0 \to A$, $z_0' \to A'$ 且ツ $D(A) \equiv D(A')$ ナラバ 5 ニヨッテ

$$R_z (A - zI) = I,\quad R_z (A' - zI) = I$$
$$\text{in } D(A) \equiv D(A')$$

カラ $R_z (A - A') = 0$, in $D(A) \equiv D(A')$,

§3 ニヨッテ

$$A = A' \quad \text{in } D(A) \equiv D(A').$$

$D(A) = D(A')$ ヲ示スニハ $D(A') \subset D(A)$ ヲ云ヘバヨイ。(反對ハ同ジコトデアル)

$y' = R_{z_0'} x \in D(A')$ ニ對シテ $y = R_{z_0} x \in D(A)$ ヲトレバ

$$y - y' = R_{z_0} x - R_{z_0'} x = (z_0 - z_0') R_{z_0} R_{z_0'} x$$

デ, $y \in D(A)$, $R_{z_0}(R_{z_0'} x) \in D(A)$,

従ッテ $y' \in D(A)$.

故ニ $D(A') \subset D(A)$

8. 最后ニ"Differentiation"トノ関係ニツイテ

$$\lim_{t \to 0} \frac{U_t - 1}{t} y = Ay \qquad y \in D(A)$$

ヲ証明シヨウ（Differentiation ニヨル方法デハ之レガ A ノ定義デアル）。

$y = R_{z_0} x$, $\mathrm{Im}(z_0) > 0$ トスル。

$$f\left(\frac{U_t - 1}{t} R_{z_0} x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(U_\tau x) \frac{\psi(\tau - t; z_0) - \psi(\tau; z_0)}{t} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty},$$

$\psi(\tau; z)$ ノ定義ニヨッテ

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} = 0, \quad \lim_{t \to 0} \int_{-\infty}^{0} = z_0 f(R_{z_0} x);$$

$$\int_{0}^{\varepsilon} f(U_\tau x) \frac{\psi(\tau - t; z_0) - \psi(\tau; z_0)}{t} d\tau$$

$$= \int_{0}^{\varepsilon} f(U_\tau x) \frac{\psi(\tau - t; z_0)}{t} d\tau$$

$$= \frac{1}{t} \int_{-t}^{0} f(U_{t+\sigma} x) \psi(\sigma; z_0) d\sigma$$

$$\lim_{t \to 0} \int_{0}^{\varepsilon} = f(U_0 x) \psi(0; z_0) = f(x)$$

故ニ

$$\lim_{t \to 0} f\left(\frac{U_t - 1}{t} \cdot R_{z_0} x\right) = f(x) + z_0 f(R_{z_0} x) = f(Ay)$$

［注意］ U_tトAトノ直接ノ関係ニツイテハ I. Gelfand ハ

$$U_h = \exp(hA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} A^n$$

ヲ証明シテ牛ル．茲デハコノ点ニハ立入ッナイコトニシタイ。