868. リー環ノ左右正規表現ニツイテノ一注意

中山　正（阪大）

先月ノ東京ノ談話会ニ於ケル正田先生ノ御話シノ中ニ次ノ当然予期サルベキ、然シ考ヘテ見ルト却々含蓄ノアル面白イ一定理ガ挿入サレテアッタ様ニ伺ッテ居リマス：アル一次変換群ガソノ変数ノ一部分ニノミ関連スルヤウナ invariant ヲ持テバソレハ可約デアル。（タダシ標数0）。

証明ハ容易デ polarization デ multilinear ナホシタ后（其ノ後ハ実ハ標数ハカマハヌ）ハ結局次々次ノコトニ帰着サレルワケデス。A_a, B_a デウゴク (ξ) ト (η) ノ双一次形式デ invariant ノモノガアルタメニハ、即チ $A_a \times B_a$ ナル積表現ガ 1 ナル第一成分ヲモツタメニハ，A_a ト $(B'_a)^{-1} = B^*_a$ ヲ intertwine スル行列スナハチ $A_a G = G B^*_a$ ヲミタスGガアルコトト同ジデアル。（書イテ見レバ一目明瞭ナコト）．同様ノコトハ Lie 環ノ表現ニツイテモイヘル。即チ、アル Lie 環ノ表現 A_a, B_a ニヨツテウゴク (ξ), (η) ノ双一次形式 $G(\xi, \eta)$ ガ invariant ナコト．即チ $A_a \times E_1 + E_2 \times B_a$（タダシ E_1, E_2 ハ B_a, A_a ト同ジ次数ノ単位行列）ガ 0 表現ヲ第一成分ニモツコトガ，A_a ト $-B'_a = B^*_a$ ガ G デ intertwine サレルコトト同ジデアル。（コレラノ事ハ R. Brauer ニヨツテ巧ミニ利用サレタ．例ヘバ吉田氏：リい環論 §16 参照）。

シカルニ、コノ Lie 環ノ場合、B_a ガアル Ideal ヲ左表現加群ト考ヘタトキニ與ヘラレル表現ナラバ B^*_a ハ同ジ Ideal ヲ右表現加群ト見タトキノ表現ニ他ナラナイ。ヨッテ，アル Ideal ヲ左，右表現加群ト見タトキノ表現ガ同値デ而シテGナル行列デ交換サレルタメニハ、ソノ Ideal ノ元ニ depend スル non-singular ナ双一次形式 $G(x, y)$ デ invariant ナモノガアルコトガ必要且ツ充分デアルコトニナリマス。コヽニ $G(x,$

y)ガ invariant トハ $G(x \circ a, y) + G(x, y \circ a) = 0$（任意ノ a ニ対シテ）ノコトデアル。（タヾシ $G(x, y)$ ハ x, y ノ坐標ニツイテノ行列 G ノ双二次形式ノ形ニカイタモノトスル）

例ヘバ Lie 環ノ左右ノ正規表現ガ同値デアルタメノアル意味ノ Criterion ナドモ得ラレタワケデアル。タヾシ Criterion ト云フベク余リニ trivial ナ云ヒ換ヘニスギナイデセウ。シカモ少シモ目新ラシイコトデハアリマセンガ、タヾコノ事ハ陰ニ陽ニ discriminant ガ左右正規表現ヲ intertwine（用ヒラレルノハ Transform ノ場合）スルト云フヤウナ形デ Lie 環ノ表現論、特ニ Casimir 行列ノトコロナドニ出テクルコトデスガ、ドウモ結局 discriminant ノ場合ヲヤルト云フワケカラデモアリマセウカ、ハジメカラ二次形式 $G(x, x)$ ニオギッテアルノガ氣ニナッテ念ノタメ書イタマデヾス。ナホ Casimir 行列モ（アノ総テノ表現行列ト可換デアルトイフ云ハヾ形式的ノ所ハ）勿論二次形式、シタガッテ對称行列シカモ non-singular ナモノカラ出発スル必要ハナク左, 右正規表現ヲ intertwine スル任意ノ行列 $G = (g_{ik})$ ニ對シテ $C = \sum_{i,k} g_{ik} A(a_i) A(a_k)$ ナル行列ガ任意ノ表現行列 $A(a)$ ト可換デアルコトハ直チニ知ラレル。

Lie 環デナイ普通ノ多元環ノ場合、左右正規表現ノ同値ナ多元環（Frobeniusean algebra）

ニツイテハ割ニ面白イ性質ガ出タノデシタガ、ソレハ左右正規表現ヲ Transform スル non-singular ナ行列ノ存在カラ直チニ出ル。スナハチ表現論的ナ意義ヲモツ左右 Ideal lattices ノ逆同型ノ他ニ更ニ annihilation ニヨル。スナハチ云ハバ環論的ナ Ideal lattices ノ逆同型ガアルカラデシタ。シカルニ Lie 環ノ場合ニモ第一ノ表現論的ノ Ideal lattice ノ逆（自己）同型ハ明カデス、ソレ以外ドウモ目星シイ性質モ見当ラナイノデスガ!?（ナホ普通ノ多元環ノ構造論ニハ何モハジメノ表現論的逆同型ハ有用ニツカハレテキマセンガ（ソレハ annihilation ノ方ガ便利），Lie 環ノ場合ニハ semi-simple ノヲ simple ノ直和ニワケルトコロデソレノ非常ニ特殊ナ場合ガ顔ヲ出シテヰルワケダト思ヒマス）。

次ニ、上ニ双一次形式デヨイノニ二次形式ニスルノハナドト云ヒマシタガ、ソレナラバ実際左右正規表現ヲ Transform スル<u>對称デナイ</u> non-singular ナ行列ハ存在スルケレドモ，<u>對称ナ</u> non-singular ナモノハ存在シナイ。トイフ様ナ例ハアルデセウカ？（勿論無クトモ双一次形式デヤッテオイタ方ガヨイコトハ明カデスガ、シカシ意味ハ少イワケデスカラ）．ドウモソウシタ例ハ目下持チ合セナイノデスガ、サリトテ對称デナイノデアレバ對称ノデモアルトイフコトガ想像サレルトイフノデモナク、トモカク、<u>コレラノ点デ御教示ヲ願ヘレバト思フ次第デス</u>．

モトモト左右正規表現が同値ナ semi-simple デナイ Lie 環ノ例ヲ色々ツクルコトが或意味デ面倒デス。次ノ方法ナド對称行列デ transform サレル場合デスが何カニ便利ナコトモナイデセウカ：

$\mathfrak{a}$ ヲ associative algebra デ symmetric (Braner-Nesbitt ノ意味デ) ナモノトスル．シカラバ、ソレヲ Lie 環ト考ヘテモヤハリ同じ対称行列デ transform サレル。更ニ $\mathfrak{a}$ ノ中ノ non-singular ナ symmetric ナ hyperplane H が 1 ヲフクマヌナラバ H ヲ Lie 環ト考ヘタトキ (H ハスベテノ commutator ヲ含ムコトニ注意)．ヤハリコレが左右正規表現が對称行列デ transform サレルモノニナル。証明ハイヅレモ殆ンド自明。