

864. *bicomact space* , 次元 = 就テ

森田 紀一 (東京文理大)

先頃 A. Weil / *uniform space* を讀ンテ *bi-*

compact Hausdorff space / 次元が Kompaktum / 場合ト同様ニ論ゼラレルコトヲ知リマシタ。  
最近 bicomact space / 次元が話題ニ上リマシタカラ<sup>1)</sup>, ソレヲ述ベテミタイト思ヒマス。

§1. normaler Hausdorffscher Raum  $R$ ヲ考ヘル。

Lemma 1.  $\mathcal{G} = \{G_1, \dots, G_s\}$  ヲ  $R$ ノ有限開被覆族トスルトキ,  $R$ カラ  $\mathcal{G}$ ノ Nerv (之ヲ多面体ト考ヘル)ノ中ヘ  $\mathcal{G}$ -abbildung が存在スル。開被覆族ニ就テ  $\in$ 同様デアル。

証明:  $R$ ガ normaler Raumデアルカラ

$\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_s\}; F_i \subset G_i, i = 1, \dots, s$   
+  $\mathcal{G}$ ト  $\ddot{a}hulich$  + 開被覆族  $\mathcal{F}$  が存在スル。ソコ  
デア  $F_i \cap R - G_i = \emptyset$  ヨリ  $F_i$  デハ 1,  $R - G_i$  デハ 0, ソ  
ノ他デア  $0 \leq f_i(x) \leq 1$  +  $R$  全体デア定義サレタ連続函  
数  $f_i(x)$  が存在スル。

$$U_i = \bigcup_x \{x; f_i(x) > 0\} \text{トオケバ,}$$

$$F_i \subset U_i \subset G_i.$$

デアルカラ開被覆族  $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_s\}$ ハ  $\mathcal{G}$ ト  $\ddot{a}hulich$ デア  
ル。コノ  $\mathcal{U}$ ト  $f_i(x)$ トヲ使ッテ Kuratowski  
寫像ヲ作レバ ( $\mathcal{U}, \text{Nerv}$ ノ Euklidische Reali-

---

1) N. Vedenissoff / Généralisation de quelques théorèmes sur la dimension, Comp. Math. 7.

sation  $K =$  於テ  $U_i =$  對應スル頂点ヲ  $b_i$  トスレバ  $R$  / 点  $x =$  ハ各頂点  $b_i = \text{mass } f_i(x)$  ヲオイタ時ノ重心ヲ 對應サセル) 之カ求ムル  $\mathcal{O}_f$ -abbildung デアル。開 被覆族子カ與ヘラレタトキハ、逆ニ開被覆族子ヲ作ツ テ同様ニマレバヨイ。

次ニ  $R$  / 次元ヲ *Pontrjagin* = 従ツテ次ノ如ク 定義スル。

定義 I. 次ノ條件ガ満足サレルトキ、 $R$  / 次元ハ  $\gamma$  デアルト云フ:  $\dim R = \gamma$ .

(a) 任意ノ  $R$  / 有限開被覆族子ヲトルトキ、子  $\mathcal{O}$  且ツ  $m(\mathcal{O}) \leq \gamma + 1$ <sup>2)</sup> + 有限開被覆族子ガ存在スル。

(b) 子  $\mathcal{O}$  + 任意ノ有限開被覆族子ヲトレバ、必ズ  $m(\mathcal{O}) > \gamma$  + 如キ有限開被覆族子ガ存在スル。

然ラバ Lemma I = ヨリ *N. Vedenissoff* / 定理<sup>3)</sup> ハ *kompakter normaler Raum* = 就テ成立スル。即チ (*parfaitement* / 假定ハ不必要)

定理 I. *kompakter normaler Raum*  $R$  / 次元ハ、任意ノ有限開被覆族子ニ對シ、常ニ  $n$  次元ノ *Polyeder* / 中ヘノ (上ヘノ)  $\mathcal{O}_f$ -abbildung ガ存在スル如キ整数  $n$  / 中、最小ノ  $n$  / デアル。

2) 子ノ一ツノ要素ヲトレバ必ズ之レヲ含ム子ノ要素カ少クモ一ツ存在スルトキ子  $\mathcal{O}$  / トカク。  $m(\mathcal{O})$  ハ子ノ *ordnung* / ヲ示ス。

3) 前出リノ論文 *Théorème I*

§2.  $R$  が特 = *bikompaakter Hausdorffscher Raum* / 場合ヲ考ヘル。

然ラバコノ時ハ  $A. Weil$ <sup>4)</sup> = ヲレバ  $R$  ハ *espace uniforme* ト考ヘラレル。ソノ *structure uniforme* ヲ與ヘル  $R \times R' =$  於ケル  $\Delta$  / *entourage* / *famille* ヲ  $V_\alpha$  トスル。

定義2.  $R$  ノ被覆族子 =  $\{F_1, \dots, F_s\}$  が  $F_i \times F_i \subset V_\alpha$  ( $i = 1, \dots, s$ ) ヲ満足スルトキ,  $V_\alpha$ -被覆族ト云フ。

$R$  ヲ  $R'$  へノ連続寫像  $f$  が  $R' =$  於ケル *Bild* / 各点  $p =$  ヲキ.  $f^{-1}(p) \times f^{-1}(p) \subset V_\alpha$  ヲ満足スルトキ,  $f$  ヲ  $V_\alpha$ -*abbildung* ト云フ。

定義3.  $R$  が次ノ條件ヲ満足スルトキ,  $\overline{\dim} R = \gamma$  トカク。

(a) 任意ノ  $V_\alpha$  ヲトレトキ  $m(\mathcal{F}) \leq \gamma + 1$  + 有限開  $V_\alpha$ -被覆族子ガアル。

(b) 有限開  $V_\alpha$ -被覆族子ヲトレト必ズ  $m(\mathcal{F}) > \gamma + 1$  如キ  $V_\alpha$  ガ存在スル

Lemma 2.  $\dim R = \overline{\dim} R$  (但シ定義1或ハ3 = 於テ其処 = 述ベラレタル如キ  $\gamma$  ガ存在シトキハ  $\dim R$  或ハ  $\overline{\dim} R$  ハ  $\infty$  トスル)

証明:  $\dim R = \gamma$  トスルト定義3, (a) ガ成立ス

---

4) *A Weil, Sur les espaces a structure uniforme*

ルコトハ Pontrjagin と同様<sup>5)</sup>、(b) 云々  $\mathcal{U} \ni S + \mathcal{V}$   
 有限、 $S$  フトリトキ任意、 $\mathcal{V}_\alpha$ -被覆族、Ordnung が  
 必ズ  $S$  より大ナル如キ  $\mathcal{V}_\alpha$ 、存在云々、バヨイ。

$\forall \mathcal{V} = \mathcal{U}$  定義 (b) = テイヘル  $\mathcal{U}$  フトリ。

コノ被覆族  $\mathcal{U}$  = 対シテハ、 $R$ ノ各点  $p = V_\alpha(p)$  フ對應サ  
 セテ出來ル被覆族  $\{V_\alpha(p)\}$  が  $\{V_\alpha(p)\} \subseteq \mathcal{U}$  デアル如キ  
 $V_\alpha$  が存在スル。<sup>6)</sup> コノ  $V_\alpha$  が我々ノ目的 = 通スル。

Lemma 2 = ヨリ、Kompaktum ノ場合、  
 $\varepsilon$ -Überdeckung、代リ =  $V_\alpha$ -Überdeckung、  
 $\varepsilon$ -Abbildung、代リ =  $V_\alpha$ -Abbildung フ使ヘ  
 ン、Kompaktum ノ場合、analogy がキク。例ヘバ  
 $R$  以外 = bicomact uniform space  $R'$  フ考ヘ、  
 $\forall$  uniform structure フ與ヘル family  $\mathcal{V}'_\beta$   
 フ表ハセバ、次ノ事ハ成立スル。

Lemma 3.  $R$  カラ  $R' \rightarrow$   $V_\alpha$ -Abbildung  $f$   
 が與ヘラレタ時、

$M' \times M' \subset V'_\beta$  + ル 則リ  $f^{-1}(M') \times f^{-1}(M') \subset V_\alpha$  + ル 如  
 キ  $V'_\beta$  が存在スル。

証明。  $f$  ハ  $R \times R$  カラ  $R' \times R' \rightarrow$  連続寫像 = 拡張出  
 來ル。 7)

5) L. Pontrjagin, Topological groups.

6) 前出 4)ノ書物, Théorème VI, p. 24.

7)  $(p, q) \in R \times R$  + ラバ  $f(p, q) = (f(p), f(q)) \in R' \times R'$

然ラバコノ寫像ヲ同ジク  $f$  デ表ハセバ  $f$  が  $V_\alpha$ -abbildung  
ナルコトヨリ

$$f^{-1}(\Delta') \subset V_\alpha$$

處テ  $\Delta' = \bigcap V'_\beta = \bigcap \bar{V}'_\beta$  ( $\bar{V}'_\beta$  ハ  $V'_\beta$  ノ閉包)

$$\therefore f^{-1}(\Delta') = \bigcap_\beta f^{-1}(\bar{V}'_\beta) \subset V_\alpha$$

而シテ  $f^{-1}(\bar{V}'_\beta)$  ハ  $R \times R =$  於ケル閉集合、 $V_\alpha$  ハ  
 $R \times R =$  於ケル閉集合トミテヨイカラ *Bikompaktheit*  
ヨリ既ニ有限個ノ  $f^{-1}(\bar{V}'_\beta)$  ノ共通部分カ  $V_\alpha =$  含マレド。

$$\bigcap_{i=1, \dots, n} f^{-1}(\bar{V}'_{\beta_i}) \subset V_\alpha$$

ソコデ  $V'_\beta \subset \bigcap_{i=1, \dots, n} V'_{\beta_i}$  ナル  $V'_\beta$  ヲトレバ、コノ  $V'_\beta$  ハ

*Lemma 3* ノ條件ヲミタス。従ッテ次ノ定理ガ成立ス  
ル。

— 以上 —

**定理 2.**  $n$  次元ノ  $R =$  對シテハ、次ノ如キ  $V_\alpha$  ガ存在  
スル。即チ  $V_\alpha$ -abbildung ナル  $R$  カラ、 $R$  ヨリ低次元  
ノ空間ヘシツルコトハ不可能デアイル。

更ニ

**定理 3.**  $R$  ノ次元  $r$  ハ、 $R$  ガ  $n$  次元ノ *Vollkugel* ノ  
上ヘ *wesentlich = abbilden* ナル様ル如キ整数  $n$   
ノ中最大ノモノデアイル。  
ガ成立スル。

ソレニハ黄表紙<sup>8)</sup> ノ 3/3 頁ノ始メノ部分ヲ少シ変更ス  
ル。即チ定理 2 = 云フ  $V_\alpha$  ヲトリ、 $R$  ヲ  $V_\alpha$ -abbildung

$r$  次元ノ多面体  $P$  へ  $r$  ツシ, コノ寫像カラ突マル Lemma  
 $3 =$  云フ  $V'_\rho$  フトレバ, 今ノ場合  $R'$  ノ *Kompaktum* フ  
 ルカラ,  $V'_\rho$  ノ正數  $\epsilon$  ガ表示サレル。コノ  $\epsilon$  フ  $P$  フ細分シテ  
 ユケバヨイ。

$n > r$  ナル  $n$  ノトルトキ  $n$  次元ノ *Vol. Kugel* へ  
 ノ *wesentliche Abbildung* ノ存在セサルコトヲ云フ  
 $=$  ハ,  $R$  カラ仰リ  $R^n$  へノ連続寫像  $f =$  對シテ,  
 $\epsilon > 0$  ト  $V_\alpha$  トヲ任意ニ與ヘテ

$$P[f(x), g(x)] < \epsilon, \quad x \in R$$

が成立スル如キ  $R$  カラ  $R^n$  へノ  $V_\alpha$ -*Abbildung*  $g$  ノ存在  
 フ云ヘバヨイ。

トコロヲ黄表紙 367 頁,  $\delta$  ノ後目ヲスル  $V_\alpha$  ノ存在ハ  
 知ラレテキルカラ, Lemma 1 フ利用シテソコノ証明ガソノ  
 マニ適用出来ル。

更ニ *Menger - Hodelinger'scher Einbettungs-*  
*satz = analogous =*

定理 4.  $\dim R = r$  ナラバ, 可附番個ノ  $V_{\alpha_i}$  ( $i = 1, \dots$   
 $\dots, n, \dots$ ) ノ與ヘタトキ, スベテノ  $V_{\alpha_i} =$  對シテ同時ニ  
 $V_{\alpha_i}$ -*Abbildung* トナル如キ  $R$  カラ  $\mathbb{R}^{2r+1}$  へノ連続寫像  
 $f$  ガアル。

が成立スル。(勿論 *Einbettungssatz*, ソノマニ, 成立  
 ハ望ミ得トイ。例ヘバ 0-次元ノ *bicomact space* ノ任  
 意濃度ノ個數ノ *topological product* ハ又 0-次元

前頁脚註

8) Alexandroff - Hopf, *Topologie I.*

デアルカラ)

§3. 次 =  $\varepsilon$ -Kette / 代り =  $V_\alpha$ -Kette を考へル  
コトが出来ル。即ち  $a_1, \dots, a_s$  が  $(a_i, a_{i+1}) \subset V_\alpha$   
ヲ満足スルトキ之ヲ  $V_\alpha$ -Kette と稱スル。

然ラバ一点  $p$  /  $V_\alpha$ -Komponent  $K_\alpha(p) \in 0$ -Kom-  
ponent  $K_0(p)$  [或ハ  $\Delta$ -Komponent トイフベキカモ  
知レマセン] 同様ニ定義サレル。

$R$  ハ勿論 *bikomakter Raum* トスル。然ラバ  
部分閉集合  $F_1, F_2$  が共通点ヲモタネバ  $V_\alpha(F_1) \cap F_2 = \emptyset$   
ナル  $V_\alpha$  が存在スル。之ハ *Kompaktum* / 場合 /  
 $P(F_1, F_2) = \sigma > 0$  = 相當スル。従ツテ  $p$  / Komponent  
ヲ  $K(p)$  トオク時

$$K(p) = K_0(p) = \bigcap_{\alpha} K_\alpha(p)$$

が同様ニ存在 / 場合ニ成立スル。

今一点  $p$  ヲ含む閉集合が同時ニ閉集合ナル  $T$  ヲトルト必  
ズ  $K(p) \subset T$ 。

従ツテ  $K_\alpha(p)$  が同時ニ開且ツ閉ナル集合トル故

定理5. *bikomakter Hausdorffscher Raum* / 一点  $p$  / Komponent ハ、 $p$  ヲ含ミ且ツ同  
時ニ開且ツ閉ナル集合スベテ / 共通部分デアル。

又、

定理6.  $R$  が0次元ナルコトト *totally dis-*  
*connected* ナルコトトハ同値デアル。但シ  $R$  ハ



bikomprakt.