# 859. Lie 群ノ 1-parameter ノ部分群ガ differentiable ナル事ノ一証明

小平　邦彦

$\mathfrak{G}$ ヲ Lie 群, $x$, $y$ etc ヲソノ元トシ, $x$ ノ座標ヲ

$$(x^1, \cdots\cdots, x^n)$$

トスル・$x$ ト $y$ ノ積ヲ現ハス函數ヲ

$$(xy)^j = f^j(x, y)$$

トスレバ, $f^j(x, y)$ ハ連続的可微分デアル。從ツテ

$$g^j_k(x, y) = \frac{1}{x^k}\Big\{ f^j(0, \cdots, 0, x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n, y)$$

$$- f^j(0, \cdots, 0, x^{k+1}, \cdots, x^n; y)\Big\}$$

トオケバ

$$g^j_k(x, y) = \frac{\partial f^j}{\partial x^k}(0, \cdots 0, \theta x^k, x^{k+1}, \cdots, x^n; y)$$

$$(0 \leqq \theta \leqq 1)$$

ハ有界デアッテ, $\dfrac{\partial f^j}{\partial x^k}$ ノ連続性カラ, $g^j_k(x, y)$ モ連続ナル事ガ分ル。

明ラカニ

$$(1) \quad f^j(x, y) - y^j = f^j(x, y) - f^j(0, y) = \sum_{k=1}^{n} x^k g^j_k(x, y)$$

$$x(t) \qquad (-t_0 < t < t_0)$$

ヲ 1-parameter ノ連続ナ部分群トスル。(1) ニヨッテ

$$x^j(t+s)-x^j(s)=f^j(x(t),x(s))-x^j(s)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}x^k(t)\,g^j_k(x(t),x(s))$$

(1) ニ於テ $y=0$ トオケバ

$$g^j_k(x,0)=\delta^j_k$$

ナルコトガ分ル．故ニ $g^j_k$ ハ連続，従ッテ一様連続ダカラ

$$g^j_k(x,y)=\delta^j_k+h^j_k(x,y)$$

トオケバ，$h^j_k(x,y)$ ハ $y\to 0$ ノトキ一様ニ $0$ トナル．
コレヲ用ヒテ上ノ式ヲ書ケバ

$$x^j(t+s)-x^j(s)=x^j(t)+\sum_{k=1}^{n}x^k(t)\,h^j_k(x(t),x(s))$$

コレヲ $s$ ニツイテ積分シテ

$$\int_0^{\varepsilon}x^j(t+s)\,ds-\int_0^{\varepsilon}x^j(s)\,ds$$
$$=\varepsilon x^j(t)+\sum_{k=1}^{n}x^k(t)\int_0^{\varepsilon}h^j_k(x(t),x(s))\,ds$$

$\int_0^{\varepsilon}x^j(t+s)\,ds=\int_t^{t+\varepsilon}x^j(s)\,ds=\int_0^{t+\varepsilon}x^j(s)\,ds-\int_0^{t}x^j(s)\,ds$ トオイテ見レバ，コノ式ハ

$$(2)\quad \int_{\varepsilon}^{t+\varepsilon}x^j(s)\,ds-\int_0^{t}x^j(s)\,ds=\varepsilon x^j(t)+\sum_{k=1}^{n}x^k(t)\int_0^{\varepsilon}h^j_k(x(t),x(s))\,ds$$

ト現ハサレル．今簡単ノタメ