858. "Einreihig" 並ビ＝Generalized "einreihig" Ring＝ツイテ

中山　正（阪大）

On Frobeniusean algebras, I（アナルス, 40）及ビ II（近刊）＝ツイテノ補足的注意ヲ一ニシタイト思ヒマス。ソコデ Frobeniusean ring ノ一般論ノ應用トシテ次ノコトヲ證明シマシタ（I, 定理 10；II, 定理 16）：

$\boxed{\text{定理 1}}$　環 A＝オイテ如何ナル両側いでやる $\mathfrak{z}$ モ（principal デ）$\mathfrak{z} = Ac = cA$ ナル形＝カケルナラバ, A ノ如何ナル剩餘環モふろべにうす的（Frobeniusean）デアル。（逆モ成立）

但シコヽデ, マタ以下スベテ, 環ト云フノハ $\boxed{\text{両方ノ連鎖律}}$ ヲ充スモノトスル. ふろべにうす環ノ一般ノ定義ハ一寸面倒（II, Chap. ii）デスが、特＝多元環ノ場合＝ハ右ト左ノ二ツノ正規表現が同値ナ（ソシテ主單位元ヲモツ）コトデアリマス。

然ル＝淺野氏ハ *Über verallgemeinerte Abelsche Gruppe* ..... （輯報, 15）デ

$\boxed{\text{定理 2}}$　環 A＝於テスベテノ両側いでやる $\mathfrak{z}$ が $\mathfrak{z} = Ac = dA$（c ハ d ト異ッテヨイ）ト表ハセルナラバ, A ハ Köthe ノ意味デ einreihig デアル1).（逆モ勿論成立）。

ヲ証明サレタ。$\boxed{\textit{einreihig}}$ ナ環ト 先ヅ

a) primär ナ環ノ直和ニ分解サレ，且ツ

b) primitive ナ巾等元 e デ作ラレタ右及ビ左いでやる eA，Ae が常ニタゞ一ツノ組成列ヲモツ如キモノデアリマス。(G. Köthe, Zeitschr. 39)

表面上大分異ッテ居リマスが実ハ上ノ 1，2 ハ実ハ同ジ事実ニ帰スルノデアリマス。即チ私ノハ浅野サンノ定理ノ別証明ヲ與ヘタコトニナリマス。（コノ定理ダケヲ問題ニスレバ長スギル別証明デスが。）ソレハ先ヅスベテノ剰餘環かふろべにうす的トイフコトト、einreihig デアルコトが一致スルノハふろべにうす環ノ構造論カラ容易ニ判リマスカラ、ソレハ今略シマス。

ソシテ浅野サンノ弱イ條件カラ私ノ強イノが直チニ出ルコトヲ辯解（逆ヲ問題ニスル時ハ弁解デハナイデセウか）サセテイタゞキマス。即チ次ノ様ナ一寸面白イ事（或ヒハ既ニヨク知ラレタコトダッタカモ知レマセンが）がアリマス。

$\boxed{\text{補題}}$ 環（両連鎖律ヲミタス）Aか主單位元ヲモットシ，ソノアル両側いでやる $\mathfrak{z}$ が $\mathfrak{z}=Ac=\alpha A$ ナル形デ表セレバ $\mathfrak{z}=cA=A\alpha$ デモアル。

$\boxed{\text{証明}}$ ハ單ニ組成列ノ計算ニヨリマス。今Aノ左加群 $\mathfrak{m}$ ノ組成列ノ長サヲ $[\mathfrak{m}]$ デアラハス。$a \longrightarrow ac\ (a\in A)$ ナル對應カラ容易ニ $\mathfrak{z}=Ac$（左いでやるトシテ）か $A/\mathfrak{l}(c) = A/\mathfrak{l}(cA)$ ト同型ニナル。タゞシ $\mathfrak{l}(*)$ ハ $*$ ニ左カラ乗

ジテ 0 ニナル（A ノ）元全体ノナス左いでやるトスル。シカルニ $cA \subseteqq \mathfrak{z}$ ナルコトハ明カデアリマスカラ、$l(cA) \geqq l(\mathfrak{z})$.
ヨッテ結局

$$[\mathfrak{z}] \leqq [A/l(\mathfrak{z})]$$

ナル式ヲ得ル。他方，$a \longrightarrow ad$ ニヨッテ判ル如ク Ad ハ $A/l(dA) = l/l(\mathfrak{z})$ ニ同型ニナル。シカルニ $Ad \subseteqq \mathfrak{z}$.
ヨッテ

$$[\mathfrak{z}] \geqq [Ad] = [A/l(\mathfrak{z})]$$

二ツノ不等式ヲ比ベレバスベテノ等号、特ニ $[\mathfrak{z}] = [Ad]$, ヨッテ $\mathfrak{z} = Ad$ デナケレバナラヌ事ガ判ル。

同様ニシテ $\mathfrak{z} = cA$.

次ニ $\boxed{\text{generalized “einreihig” ring}}$ ニツイテノ注意ヲ一ツ。Gen. "einreihig" ring ハ einreihig ノ拡張トシテ前出ノ條件ノ a), b) ノ中. 少シ強引スギル a) ヲ除イテ、b) ダケヲ假定シタモノ（タゞシ主單位元ノ存在ハヤハリ假定）トシテ導入シマシタ。然モ Köthe ノ $\boxed{\text{主定理}}$ デアッタ所ノ"イカナル左加群モ cyclic デシカモ Ae（e ハ primitive ナ巾等元）ト homomorphic ニナルヤウナ加群ノ直和ニ分解サレル"トイフコトガ保持サレテヰルコトヲ証明シマシタ（多元環ニツイテハ I, 定理11, 一般ニツイテハ II, 定理17）。右加群ニツイテモ勿論同様ノ性質ガアリマス。然モ（左, 右両方同時ニトレバ）ソノ逆モ成立シマス。ソノコトハ多元環ニツイテハ既ニ II ノ最後ニ一寸注意シテオキマシタガ，實

ハ一般ノ場合デモヨイコトニ氣付キマシタ。ソノ証明ノ大略ヲ述ベマス.

先ヅAが上記ノ性質，特ニイカナル直既約ノ左加群モAe（eハ適當ナ*primitive idempotent*）ニ*homomorphic*，同様ニイカナル直既約右加群モeAニ*homomorphic*トイフ性質ヲモツトスル。（Ae, eAニ*homomorphic*トイフ代リニ<u>唯一ツ</u>ノ*maximal*ナ部分加群ヲ有ツト云ッテモヨイ）.

然ルトキAが*Gen. einreihig*ナルコトヲ云ヒタイノデアルが、ソレニハ如何ナル*primitive idempotent* e'ヲトッテモAe'がタゞ一ツノ組成列ヲモツ事、即チ$N^{i-1}e/N^ie$ナル剰餘加群が常ニ（0デナケレバ）単純ナルコト及ビ右加群ニ対スル同様ノコトヲイヘバヨイ。タゞシ茲ニNハAノ*Radical*トスル。

假リニソウデナイトシテ、アル一ツノiニツイテ$N^{i-1}e'/N^ie'$ナル完全可約加群が二ツ以上ノ単純加群ニワカレルトシ、ソノ任意ノ二ツm_1, m_2ヲトル。更ニココデiハ上ノ如キ事ノオコル最初ノモノトシテオク。從ッテ$N^{j-1}e'/N^je'$（$j<i$）ハスベテ単純デアルトスル。（コノ假定ノ下ニ$N^{i-1}e'/N^ie'$がAe'/N^ie'ノ最大完全可約部分群ナルコトが容易ニ分ル）。

1) $m_1 \neq m_2$ノ場合．二ツノ*primitive*ナ巾等元e_1, e_2ヲ$m_1 \cong Ae_1/Ne_1$，$m_2 \cong Ae_2/Ne_2$ナル如クトル。而シテ新ニ二ツノ右加群

$$\mathfrak{n}_1 = e_1 A / e_1 N^i, \quad \mathfrak{n}_2 = e_2 A / e_2 N^i$$

ヲ考ヘル。$\mathfrak{m}_1 \cong Ae_1/Ne_1$ カラ $e_1 N^{i-1} e' \neq N^i$，ヨッテ $\mathfrak{n}_1$ ノ完全可約約群 $e_1 N^{i-1}/e_1 N^i$ ノ中ニ $e'A/e'N$ ト同型ナ単純約群ガ少クモ一ツ存在スル。ソレヲ σ_1 トスル。同様ニ $\mathfrak{n}_2$ ハ $e'A/e'N$ ト同型ナ単純君羊 σ_2 ヲ含ム。ソコデ今 σ_1 ト σ_2 ヲ *identify* シテ（$\sigma_1 \cong \sigma_2$ ナルコトニ注意），新ニ一ツノ右加群 $\mathfrak{n}$ ヲ得ル：

$$\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2), \quad \mathfrak{n}_1 \frown \mathfrak{n}_2 = \sigma_1 = \sigma_2$$

シカルトキコノ $\mathfrak{n}$ ガ<u>直既約ニナル</u>ノデアル。然シソノ証明ハ一寸面倒（但シ要スルニ簡単ナ群論的考察）ダカラ省略シマス。

他方 $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}N$ ガ単純デナイコトカラ $\mathfrak{n}$ ハ決シテ *primitive* ナ巾等元デ作ラレタ右いでやるニ *homomorphic* ニナリ得ナイ。ヨッテコノ Case 1) ハ排除サレネバナラヌ。

2) $\mathfrak{m}_1 \cong \mathfrak{m}_2$ ノ場合。今 $\mathfrak{m} = Ae'/N^i e'$ ($\cong \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$) トオキ更ニ他ニモウ一ツコレト同型ナ群 $\mathfrak{m}^*$ ヲ考ヘル。而シテ $\mathfrak{m}^*$ ニ於テ $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ ニ對應スル部分加群ヲ $\mathfrak{m}_1^*$，$\mathfrak{m}_2^*$ トスル。シカルトキ $\mathfrak{m}_2$ ト $\mathfrak{m}_1^*$ トヲ *identify* シテ（*suffix* ニ注意!!）一ツノ新シイ加群 $\hat{\mathfrak{m}}$ ヲツクル。

$$\hat{\mathfrak{m}} = (\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^*), \quad \mathfrak{m} \frown \mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_1^*$$

シカラバコノ左加群 $\hat{\mathfrak{m}}$ ガ直既約ニナル。ソノ証明ニツイテハ、タトヘバ上記 Köthe ノ論文、或ハ（彼ノ弟子）

14. Brummund ノ Dissertation "標数 p ノ係数体ニ於ル群環ニツイテ" ヲ参照。

他方コノ場合モ $\mathfrak{m}$ ハ primitive ナ巾等元ノツクル principal ナ左いでやるニ homomorphic ニナラヌ事ハ明カ. ヨツテ 2) モ不可能.

結局矛盾ニ到達シ、Aガ Gen. einreihig ナルコトガワカル。

次ニ上記ノ事ニ関連シタ注意ヲ一二ニ述ベル. モトモト einreihig 環ハ Köthe ガ単因子論ノ拡張ノ意味デ導入シタノデアッタガ、彼ハ "スベテノ左マタハ右加群ガ cyclic ナ群ノ直和ニ分解サレル様ナ環ハ？" ト自問シタ。単ニ cyclic ナ群トイフバカリデナク、最大ナ部分群ガ唯一ツト云フ條件ヲツケレバ上記ノ如ク逆ノ方モ、シタガツテ問題ガ完全ニ我々ノ generalized "einreihig" 環デ解決サレル。(シカモ附加シタ條件ハ単因子論ノ拡張ノ上カラ見テモ不自然ノモノデハナイ). シカシ Köthe ノ問ノマヽデハ問題ハ未ダ残ル。(特ニ可換ナ環ニノミ限レバソレハ既ニ einreihig ナ環デ解決サレテヰルコトハ Köthe ガ既ニ述ベテヰル如クデアル) 現ニソノ如何ナル左又ハ右加群モ cyclic ナモノノ直和ニナリ、シカモ generalized "einreihig" デナイ環ガ存在スル.

タトヘバ

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

ナル行列全体ノナス多元環ガサウデアル。（証明省略）

更ニ、上記ノ Brummund ノ論文デ標数 p ノ体ノ上デハ Cyclic デナイ p-group ハ常ニイクラデモ大キナ直既約ナ表現ヲモツコトヲ述ベテヰル。彼ノ論法ヲツカフト、アル適當ナ primitive 巾等元 e ニ對シテ、且ツアル index i ニ對シテ $N^{i-1}e/N^{i}e$ (N ハ radical) ナル完全可約左加群ガ少クモ二ツ互ニ同型ナ単純部分加群ヲフクメバ、ソウスレバイクラデモ大キナ直既約ナ左加群ガ存在スルコトガワカル。

然ラバ、イクラデモ大キナ直既約左又ハ右加群ヲモタナイ環ノ一般ナモノハ？トイフ問題ガ起ル。上ノ條件ト generalized "einreihig" ナ條件トノ間ニハ勿論未ダ大キナ間隙ガアリ、generalized "einreihig" ナル概念ハ（上ノ Köthe ノヲサヘ解決シナイノダカラ a fortiori ニ）コノ問題ニモ未ダ無力デアル。モシコレラノコトニ関シテ何等カノ御教示ヲイタダケレバ幸甚ニ思ヒマス。