857. Fourier series ト Fourier transform ノ関係. I

河田　龍夫(仙台高工)

1. Fourier transform ニ関スル色々ノ定理ハ多ク Fourier series ニ関スル定理ノ analogy ニナッテヰル。ソノ証明モ実際 Fourier series ノ定理ニ reduce スルカ又ハ analogous ナ方法デ遂行スル場合が多イ。

コノ中 analogous ナ方法デ Fourier transform ノ定理ヲ証明スル場合，一々其ヲ繰返サナイデ Fourier series ノ定理ニ reduce 出来レバ好都合デアル．又，現在 Fourier series ニ reduce シテ証明シテヰル場合(例ヘバ Hausdorff-Young ノ analogy, Fourier transform ノ existence 等)デモソノ定理；定理ニ應ジテ特別ナ reduction ヲ行ッテヰル様ニモ思ハレル。夫レデソウイフ reduction が一般ノ定理カラ行ハレレバ面白カロウト考ヘラレル。

コウイフ積リデ Fourier transform ト Fourier series ノ関係ヲ示ス一定理ヲ証明シテ見タ。コノ様ナ定理が他ニモ色々得ラレルト思ハレル。

2. コヽデ示ス定理ハ本年ノ年會デ述ベタモノデアル。其ノ時ハ未ダ完全ニ証明出来テヰナカッタノデ出来ルダロウトイフ豫想ダケ述ベタノデアルが実際ヤッテ見ルト割合ニ

簡單ニ証明出來タ次第デアル。定理自身ハ極クアタリマヘノ様ナ氣ガスルケレド，上ニ述ベタ意味デ面白味モナイコトモナイシ，之カラ Hausdorff-Young 定理ノ analogy 即チ Titchmarsh ノ定理ト云ハレルモノ，又 Fourier transform ノ existence ガ証明サレル．

（定理ノ文句ニハ Fourier transform ノ existence ヲ豫期シテヰルガ，実際應用スルトキハ其レヲ必要トシナイ事ガアル．）

定理1. $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ トシ，ソノ Fourier transform（ソノ存在ヲ假定スル）ヲ $F(t)$ トシ，$\varphi(t)$ ヲ period $2R$ ノ periodic function デ

$$\varphi(t)=F(t);\quad -R<t<R$$

トスル．$\varphi(t)$ ノ Fourier coeff ヲ C_n トスルト

$$\left(C_n=\frac{1}{2R}\int_{-R}^{R}\varphi(t)e^{-in\frac{\pi}{R}t}\,dt\right)$$

$$(1)\qquad \sum_{-\infty}^{\infty}|C_n|^p\leqq\frac{A}{R^{p-1}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx\qquad p>1$$

定理2. $\varphi(t)\in L_p(-R,R)$ デ periodic トスル．ソノ Fourier coeff ヲ C_n トシ

$$F(t)=\varphi(t)\qquad -R<t<R$$

$$\quad\;=0\qquad |t|>R$$

トスル．$F(t)$ ノ Fourier transform ヲ $f(x)$ トスレバ

$$(2)\quad \frac{1}{R^{p-1}}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx \leqq A\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_n|^p$$

上ノ二定理ヲマトメテ次ノ様ニモ云ハレル.

定理 3. $F(t)\in L(-R,R)$ ノ Fourier coeff ヲ c_n トスルトキ

$\sum|c_n|^p<\infty$ ナルタメノ必要充分ナル條件ハ $F(t)$ ガ一ツノ $L_p(-\infty,\infty)$ ノ函數 $f(x)$ ノ Fourier transform ト $(-R,R)$ デ一致スル事デアル。

コノ $f(x)$ トシテ次ノ不等式ノ成立スル如キモノヲトル事ガ出來ル。

$$R^{p-1}\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^p \leqq A\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx \leqq BR^{p-1}\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^p$$

$(p>1)$

3. 上ノ定理ヲ次ノ定理ニ reduce シテ証明スル. 是レハ conjugate function ニ関スル定理ノ discrete analogy デ Titchmarsh ノ証明シタモノデアル.

定理 A. $\sum_{-\infty}^{\infty}|a_n|^p<\infty,\quad p>1$ トシ

$$b_k=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_n}{n+k+\frac{1}{2}}$$ トスル（是ノ convergency ハ明ラカ）

ソウスルト

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|b_k|^p \leqq A_p\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^p$$

ガ成立スル. A_p ハ $\{a_n\}$ ニハ independent デ p ニノミ依存スル常数デアル.

定理1ダケ証明スル. 定理2ノ証明モ全ク同様ニヤレル.

$$\varphi(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{R}t},$$

$$C_n = \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} \varphi(u) e^{-in\frac{\pi}{R}u} du$$

$$= \frac{1}{2R}\int_{-R}^{R} e^{in\frac{\pi}{R}u} du \ \underset{T\to\infty}{l.i.m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T} f(t) e^{-itu} dt$$

$$= \frac{1}{2R}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt \int_{-R}^{R} e^{i(n\frac{\pi}{R}+t)u} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, R}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin Rt}{n\frac{\pi}{R}+t} f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot R}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \pi v}{n+v} f\left(\frac{\pi}{R}v\right) dv$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}\, R}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, \frac{\sin \pi t}{n+t} dt \qquad \left(\psi(t) = f\left(\frac{\pi}{R}t\right)\right).$$

$$(-1)^n \sqrt{2\pi}\, R C_n \equiv d_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\, \frac{\sin \pi t}{n+t} dt$$

$$= \int_{-n+1}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-n-1} + \int_{-n-1}^{n+1} = I_n + J_n + K_n, \text{ トオク.}$$

$$I_n = \sum_{u=-n+1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{\psi(t) \sin t\pi}{t+u} dt$$

$$=\sum_{k=-n+1}^{\infty}\frac{1}{k+n+\frac{1}{2}}\int_k^{k+1}\psi(t)\sin t\pi\,dt$$

$$+\sum_{k=-n+1}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{\psi(t)\sin t\pi\,(k+\frac{1}{2}-t)}{(t+n)(k+n+\frac{1}{2})}\,dt$$

(3) $$=\sum_{k=-n+1}^{\infty}\frac{a_k}{k+n+\frac{1}{2}}+S_n \qquad \left(a_k=\int_k^{k+1}\psi(t)\sin t\pi\,dt\right)$$

トオク.

(4) $$|S_n|\leqq\sum_{k=-n+1}^{\infty}\frac{1}{(k+n)^2}\int_k^{k+1}|\psi(t)|dt=\sum_{k=-n+1}^{\infty}\frac{1}{(k+n)^2}b_k,$$

$$b_k=\int_k^{k+1}|\psi(t)|\,dt.$$

又 $$J_n=\int_{-\infty}^{-n-1}\frac{\psi(t)\sin t\pi}{t+n}dt=\sum_{k=-\infty}^{-n-2}\int_k^{k+1}\frac{\psi(t)\sin t\pi}{t+n}dt$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-n-2}\frac{1}{k+n+\frac{1}{2}}\int_k^{k+1}\psi(t)\sin t\pi\,dt$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{-n-2}\int_k^{k+1}\frac{\psi(t)\sin t\pi\,(k+\frac{1}{2}-t)}{(t+n)(k+n+\frac{1}{2})}\,dt$$

(5) $$=\sum_{k=-\infty}^{-n-2}\frac{a_k}{k+n+\frac{1}{2}}+T_n,$$

(6) $$|T_n|\leqq\sum_{k=-\infty}^{-n-2}\frac{1}{(k+n)^2}\int_k^{k+1}|\psi(t)|\,dt=\sum_{k=-\infty}^{-n-2}\frac{b_k}{(k+n)^2}$$

(3) (4) (5) (6) ヨリ

$$d_n=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{a_k}{k+n+\frac{1}{2}}+S_n+T_n+2a_{n-1}-2a_n+K_n$$

$$|K_n| \leqq A\int_{-n-1}^{n+1} |\psi(t)|\, dt,$$

故ニ

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |d_n|^p \leqq A\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{k+n+\frac{1}{2}}\right|^p + A\sum_{n=-\infty}^{\infty} |S_n|^p$$

$$+ A\sum_{k=-\infty}^{\infty} |T_n|^p + A\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^p + A\sum_{n=-\infty}^{\infty} |K_n|^p$$

$$= A(L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5)$$

トオク．

$$|a_n|^p \leqq \int_n^{n+1} |\psi(t)|^p dt, \quad |b_n|^p \leqq \int_n^{n+1} |\psi(t)|^p dt$$

ナル故ニ

(7) $$L_4 \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^p dt$$

(8) $$L_5 \leqq A\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^p dt$$

$$L_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-n+1}^{\infty} \frac{b_k}{(k+n)^2}\right)^p = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_{m-n}}{m^2}\right)^p$$

今 $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} l_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_{m-n}}{m^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} l_n b_{m-n}$$

$$\leqq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} l_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{m-n}^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

$$= A\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} l_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

今 $l_n=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_{m-n}}{m^2}\right)^{p-1}$ トスレバ

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_{m-n}}{m^2}\right)^p \leqq A\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_{m-n}}{m^2}\right)^p\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

故＝ $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_{m-n}}{m^2}\right)^p \leqq A\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n^p$

從テ

$$(9)\quad L_2 \leqq A\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n^p \leqq A\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(t)|^p dt.$$

同様＝

$$(10)\quad L_3 \leqq A\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(t)|^p dt.$$

次＝定理A＝ヨリ

$$(11)\quad L_1 \leqq A\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^p \leqq A\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(t)|^p dt.$$

(7)―(11)＝ヨリ

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|d_n|^p \leqq A\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(t)|^p dt = A\cdot R\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^p dt.$$

是レヨリ (1) ヲ得ル。