854. 一様位相空間ニ就テ

小平　邦彦（東大）

5. 函數空間. $\mathfrak{X}$ ヲ任意ノ空間, $\mathfrak{R}$ ヲ $\{\mathfrak{U}_\alpha(p)\}$ ヲ近傍系トスル uniform space トスル. $\mathfrak{X}$ ヲ domain トシ $\mathfrak{R}$ ヲ range トスルスベテノ函數ノ作ル空間ヲ $\mathfrak{R}^{\mathfrak{X}}$ デ現ハス. $\mathfrak{R}^{\mathfrak{X}}$ 及ビソノ部分空間ヲ函數空間トヨビ, $\mathfrak{F}$ デ現ハス。

$\mathfrak{F}$ ニ於テハ通常二種ノ一様位相ガ定義サレル。スナハチ

(1) $\mathfrak{U}_\alpha(f_0) = (f;\ f(x)\in\mathfrak{U}_\alpha(f_0(x))$ fur alle $x\in\mathfrak{X})$

デ定義サレタ $\mathfrak{U}_\alpha(f_0)$ ヲ f_0 ノ強イ近傍トイヒ, コノ近傍系ニヨッテ定メラレル $\mathfrak{R}^{\mathfrak{X}}$ ノ一様位相ヲ強イ一様位相, 或ハ略シテ strong topology トイフ. コレニ對シテ

(2) $\mathfrak{U}_{x_1x_2\cdots\cdots x_l\alpha}(f_0) = (f;\ f(x_j)\in\mathfrak{U}_\alpha(f_0(x_j)),\ 1\leqq j\leqq l)$

デ定義サレタ $\mathfrak{U}_{x_1x_2\cdots\cdots x_l\alpha}(f_0)$ ヲ f_0 ノ弱イ近傍トイヒ, コノ近傍系デ定メラレル一様位相ヲ弱イ一様位相, 或ハ weak topology トイフ。

$f\in\mathfrak{R}^{\mathfrak{X}}$ ニ對シテ, $p^x = f(x)$ トオケバ, f ハ $p=(p^x)$ ナル直積空間:

(3) $$\prod_{x\in\mathfrak{X}}\otimes\mathfrak{R}^x,\quad \mathfrak{R}^x=\mathfrak{R}$$

ノ点デ現ハサレル. コノ様ナ意味デ $\mathfrak{R}^{\mathfrak{X}}$ ハイクツカノ $\mathfrak{R}$ ノ

直積ト考ヘラレル。$\mathfrak{R}^*$ ノ弱イ一様位相ハ，$\mathfrak{R}^*$ ヲ $\mathfrak{R}$ ノ直積ト考ヘタトキノ一様位相ニ他ナラナイ。

従ッテ直積ニ関スル定理カラ，例ヘバ次ノ定理ガ得ラレル。

定理1. $\mathfrak{R}$ ガ *totally bounded* ナラバ $\mathfrak{R}^*$ ハ *weakly totally bounded* デアル。

上記ノ如キ種々ノ一様位相ヲ統一的ニ論ズルタメニハ，次ノ様ナ概念ヲ導入スルノガ有効デアル：(X) ヲ $\mathfrak{X}$ ノ additive[1] ナ部分集合属トシ

$$(4)\qquad \sum_{X \in (X)} X = \mathfrak{X}$$

ナルモノトスル。コノ様ナ (X) ガ與ヘラレタトキ，

$$(5)\qquad \mathfrak{U}_{X\alpha}(f_0) = (f;\ f(x) \in \mathfrak{U}_\alpha(f_0(x)),\ x \in X)$$

ニヨッテ定義サレタ $\mathfrak{U}_{X\alpha}(f_0)$ ヲ f_0 ノ (X)－近傍ト名付ケ，$\{\mathfrak{U}_{X\alpha}(f)\}$ ナル近傍系ニヨッテ定メラレル $\mathfrak{R}^*$ ノ一様位相ヲ (X)－一様位相トヨブコトニスル。$\mathfrak{R}^*$ ガ $\{\mathfrak{U}_{X\alpha}(f)\}$ ナル近傍系ニヨッテ *uniform space* トナルコトハ容易ニ確メラレル。(X) トシテ $\mathfrak{R}$ ノミヨリ成ル集合属ヲトレバ，(X)－一様位相ハ強イ一様位相ト一致シ，(X) ヲ $\mathfrak{R}$ ノ有限部分集合ノ全体トスレバ，(X)－一様位相ハ弱イ一様位相トナル。

(X) ト (X') ガ與ヘラレタトキ，如何ナル X モ或ル X' ニ含マレルナラバ，(X) ハ (X') ニ含マレルトイヒ

---

1) 有限加法的トスル。

(6) $(\mathfrak{X}) \subset (\mathfrak{X}')$

トカクコトニスル。明カニ $(\mathfrak{X}) \subset (\mathfrak{X}')$ ナラバ，$(\mathfrak{X})$-一様位相ハ $(\mathfrak{X}')$-一様位相ヨリ弱イ。弱イ一様位相ハスベテノ $(\mathfrak{X})$一様位相ヨリモ弱ク，強イ一様位相ハスベテノ $(\mathfrak{X})$一様位相ヨリモ強イ。

定理2. $(\mathfrak{X})$-fundamental ナ d.s.p. (f_λ) ガ各 x ニ於テ $\lim_\lambda f_\lambda(x) = f(x)$ ナラバ，$(\mathfrak{X})$-一様位相ノ意味デモ $\lim_\lambda f_\lambda = f$ デアル。

証明. 任意ニ與ヘラレタ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{X}\sigma}$ ニ對シテ，$\mathfrak{U}_\tau^2 \subset \mathfrak{U}_\sigma$ ナル $\mathfrak{U}_\tau$ ヲトル。

λ_0 ヲ，$\lambda, \mu > \lambda_0$ ニツイテハ $f_\lambda \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{X}\tau}(f_\mu)$ ナル如ク定メル。

$\lambda > \lambda_0$ ヲ任意ニ定メ，μ ヲ各 $x \in X$ ニ對シテ $f_\mu(x) \in \mathfrak{U}_\tau(f(x))$ ナルヤウニ定メレバ，$x \in X$ ニ對シテ

$$f_\lambda(x) \in \mathfrak{U}_\tau(f_\mu(x)) \subset \mathfrak{U}_\tau^2(f(x)) \subset \mathfrak{U}_\sigma(f(x))$$

トナル。即チ $f_\lambda \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{X}\sigma}(f)$. 故ニ $(\mathfrak{X})$一様位相ノ意味デ $\lim_\lambda f_\lambda$ デアル。

明ラカニ $(\mathfrak{X})$-一様位相ノ意味デ $\lim_\lambda f_\lambda = f$ ナラバ各 x ニ於テ $\lim_\lambda f_\lambda(x) = f(x)$ デアルカラ

定理2'. f_λ ガ f ニ $(\mathfrak{X}')$-收斂スルトキ，(f_λ) ガ $(\mathfrak{X})$-fundamental ナラバ，ソレハ f ニ $(\mathfrak{X})$-收斂スル。

定理3. $\mathfrak{R}$ ガ complete ナラバ，$\mathfrak{R}^*$ ハ，任意ノ

$(\mathfrak{X})$ ニツイテ，$(\mathfrak{X})$-complete デアル。

証明：　(f_λ) ヲ $(\mathfrak{X})$-fundamental ナ d.s. ト スレバ，各 x ニツイテ $(f_\lambda(x))$ ハ fundamental デアル．故ニ $\lim_\lambda f_\lambda(x)=f(x)$ ガ存在スル．$f=f(x)$ ヲカクノ如ク定メレバ，定理1ニヨッテ $\lim_\lambda f_\lambda = f$．故ニ $\mathcal{R}^{\mathfrak{X}}$ ハ $(\mathfrak{X})$-complete デアル。

全ク同様ニシテ

定理3_2．$\mathcal{R}$ ガ topologically complete ナラバ，$\mathcal{R}^{\mathfrak{X}}$ ハ $(\mathfrak{X})$-topologically complete デアル。

定理4．函數空間 $\mathfrak{F}$ ガ $(\mathfrak{Y})$-totally bounded ナラバ，$\mathfrak{F}$ ニ於テハ，任意ノ $(\mathfrak{X})$-一様位相ハ $(\mathfrak{Y})$-一様位相ト一致スルカ，然ラザレバ $(\mathfrak{Y})$ 一様位相ヨリ強イ。

証明．[2] 任意ノ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{Y}\alpha}$ ニ對シテ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{X}\tau}\subset\mathfrak{U}_{\mathfrak{Y}\alpha}$ ナル $\mathfrak{U}_{\mathfrak{X}\tau}$ ガ存在スルコトヲ示セバヨイ。コノタメニ或ル $\mathfrak{U}_{\mathfrak{Y}\alpha}$ ガアッテ，$\mathfrak{U}_{\mathfrak{X}\tau}\subset\mathfrak{U}_{\mathfrak{Y}\alpha}$ ナル $\mathfrak{U}_{\mathfrak{X}\tau}$ ガ存在シナカッタト假定シテ矛盾ニ至ルコトヲ示ス．先ヅ τ ヲ

$$\mathfrak{U}_\tau^3\subset\mathfrak{U}_\alpha$$

---

2) $\mathfrak{F}$ ガ $(\mathfrak{Y})$-complete ナルトキハ，$\mathfrak{F}$ ハ bicompact トナルカラ，$(\mathfrak{Y})$-位相，從ッテ $(\mathfrak{Y})$-一様位相ガ他ノ一様位相ヨリ弱イコトガ直チニ分ル。一般ノ場合ニハ $\mathfrak{F}$ ノ代リニ $\mathfrak{F}$ ノ $(\mathfrak{Y})$-完全化 $\tilde{\mathfrak{F}}$ ヲ考ヘレバ，$(\mathfrak{Y})$-complete ナ場合ニ帰着セシメラレル。ココデハコノ方法ニヨラズニ直接証明シタノデアル。

ナル様ニ定メル，然ルトキハ各Xニツイテ

$$f_X \in \mathfrak{U}_{X\tau}(g_X), \quad f_X \notin \mathfrak{U}_{Y\alpha}(g_X)$$

ナルf_X，g_Xガ存在スル．(X)ハ$\subset$ナル関係ヲ$<$ト定メレバ，(X)ハdirected setトナッテヰル．故ニ$\mathfrak{F}$ガ(Y)-totally boundedダカラ，(X)トcofinalナd.s. (X_Λ)ヲ選ンデ(f_{X_Λ})，(g_{X_Λ})ガ(Y)-fundamentalナル様ニ出来ル．（Nr. 3，定理1_2）．従ッテMヲ適當ニトレバ，

$\Lambda > M$ナラバ，$\quad f_{X_\Lambda} \in \mathfrak{U}_{Y\tau}(f_{X_M})$，$g_{X_\Lambda} \in \mathfrak{U}_{Y\tau}(g_{X_M})$

トナル．$f_{X_M} \notin \mathfrak{U}_{Y\alpha}(g_{X_M})$ヨリ

$$f_{X_M}(y) \notin \mathfrak{U}_\alpha(g_{X_M}(y)), \quad y \in Y$$

ナルyガアル．然ルニΛヲ適當ニトレバ，$y \in X_\Lambda$ナラシメルコトガ出来ル。

従ッテ$f_{X_\Lambda} \in \mathfrak{U}_{X_\Lambda \tau}(g_{X_\Lambda})$ニヨッテ

$$f_{X_\Lambda}(y) \in \mathfrak{U}_\tau(g_{X_\Lambda}(y))$$

トナルカラ

$$f_{X_M}(y) \in \mathfrak{U}_\tau(f_{X_\Lambda}(y)) \subset \mathfrak{U}_\tau^2(g_{X_\Lambda}(y)) \subset \mathfrak{U}_\tau^3(g_{X_M}(y)),$$

故ニ

$$f_{X_M}(y) \in \mathfrak{U}_\alpha(g_{X_M}(y))$$

トナル．コレハ矛盾デアル．　　——証明終——

コノ定理カラ例ヘバ次ノ定理ガ得ラレル。

定理4′．$(X) < (Y)$ナルトキ，$\mathfrak{F}$ガ(Y)-totally boundedナラバ，$\mathfrak{F}$ニ於テ(Y)-一様位相ト(X)-一様位

相ハ一致スル。[3)]

$\mathfrak{X}$ガ$\{\mathfrak{U}_\alpha(x)\}$ヲ近傍系トスル一様位相空間ナル場合ヲ考ヘル。コノトキ，一様連続ナ函数カラ或ル函数族$\mathfrak{F}(\subset \mathcal{R}^{\mathfrak{X}})$ハ，與ヘラレタ$\mathfrak{V}_\tau$ニ對シテ，$\mathfrak{U}_\alpha$ヲ適當ニ選ンデ，$x, y \in \mathfrak{X}$及ビ$f \in \mathfrak{F}$ノ如何ニ関セズ，常ニ

(7) $\quad x \in \mathfrak{U}_\alpha(y)$ ナラバ $\quad f(x) \in \mathfrak{V}_\tau(f(y))$

ナラシメ得ルトキ，同程度ニ一様連続デアルトイフ。

定理5. $\mathcal{R}$及ビ$\mathfrak{X}$ガ共ニ *totally bounded* ナルトキ，$\mathfrak{F} \subset \mathcal{R}^{\mathfrak{X}}$ガ同程度ニ一様連続ナラバ，$\mathfrak{F}$ハ *strongly totally bounded* デアル。

証明. 任意ニ$\mathfrak{V}_\sigma$ヲ與ヘテ，$\mathfrak{V}_\tau$ヲ

$$\mathfrak{V}_\tau^3 \subset \mathfrak{V}_\sigma$$

ナル様ニ定メル. $\mathfrak{V}_\tau$ニ對シテ(7)ヲ満足スル$\mathfrak{U}_\alpha$ヲトル. 假定ニヨッテ

$$\mathfrak{X} = \sum_{j=1}^{l} \mathfrak{U}_\alpha(x_j)$$

ナルx_j ($j=1, 2, \cdots\cdots l$)ガ存在スル. $\mathfrak{F}$ハ *weakly totally bounded* デアル.(定理1). 故ニ

$$\mathfrak{F} = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{V}_{x_1, x_2 \cdots\cdots x_l \tau}(f_k)$$

ナルf_kガ存在スル. スナハチ，任意ノ$f \in \mathfrak{F}$ニ對シテ

$$f(x_j) \in \mathfrak{V}_\tau(f_k(x_j)), \qquad 1 \leqq j \leqq l$$

---

3) 従ッテ，$\mathfrak{F}$ガ(Y)- *totally bounded* ナラバ，(Y)-一様位相ハ弱イ一様位相ト一致スル。

ナル f_k ガアル。任意ノ x ハ或ル $\mathfrak{U}_\alpha(x_j)$ ニ含マレル.

コノトキ

$$f(x) \in \mathfrak{U}_\tau(f(x_j))$$

トナルカラ

$$f(x) \in \mathfrak{U}_\tau(f(x_j)) \in \mathfrak{U}_\tau^2(f_k(x_j))$$
$$\in \mathfrak{U}_\tau^3(f_k(x)) \subset \mathfrak{U}_\sigma(f_k(x)),$$

スナハチ，$f \in \mathfrak{U}_\sigma(f_k)$ デアル．故ニ

$$\mathfrak{F} = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{U}_\sigma(f_k)$$

故ニ $\mathfrak{F}$ ハ totally bounded デアル。

6. 線形空間. 吾々ハ

1° $|u|_k \geqq 0$, スベテノ k ニツイテ $|u|_k = 0$ ナラバ $u = 0$,

2° $|u+v|_k \leqq |u|_k + |v|_k$,

3° $|\alpha u|_k = |\alpha||u|_k$, α ハ複素数.

ナル條件ヲ満足スル．函數系 $(|u|_k)$, $u \in \mathfrak{L}$, ノ定義サルタ線形空間 $\mathfrak{L}$ ヲ一般 Banach 空間ト名付ケ，$(|u|_k)$ ヲ $\mathfrak{L}$ ノ Norm 系トヨブ。[1] $\mathfrak{L}$ ニ於テ距離函數系 (ρ_k) ヲ

(2) $\rho_k(u\ \ v) = |u - v|_k$

ニヨッテ定義スル. $\mathfrak{L}$ ハコノ距離函數系ニヨッテ一般距離空

1) convex ナ topological linear space ハスベテ一般 Banach 空間ト考ヘラレル.

Neumann: Topological linear space. l.c.

間トナリ，Nr.1—Nr.5ノ理論ガ適用サレル。

例トシテBanach空間Bノ bounded linear functional ノ space ヲ考ヘル事トシ，コレヲ$\overline{B}$トスル。$f \in \overline{B}$ハ，ソノ linearity ニヨッテ，

(3) $\mathfrak{X} = (x;\ |x| \leqq 1)$

ナルBノ unit sphere ニ於ケル様子ニヨッテ一意的ニ定マル。ソコデ吾々ハ$\overline{B}$ヲ$\mathfrak{X}$ヲ domain トスル函数空間ト考ヘテ（$\mathfrak{X}$）−一様位相ヲ導入シ，コレヲ$\overline{B}$ノ（$\mathfrak{X}$）−一様位相ト名付ケル。

(4) $$|f|_X = \overline{\text{fin}}_{x \in X} |f(x)|$$

ニヨッテ norm 系（$|f|_X$）ヲ定義スレバ，$\overline{B}$ノ($\mathfrak{X}$)−一様位相ハ，コノ norm 系ニヨッテ與ヘラレル。$\overline{B}$ハスナハチ（$|f|_X$）ヲ norm 系トスル一般Banach空間デアル。コノ意味ノ strong uniform topology ハ

(5) $$|f| = \overline{\text{fin}}_{|x| \leqq 1} |f(x)| = \overline{\text{fin}}_{x \in B} |f(x)|/|x|$$

ナル norm デ與ヘラレ，通常ノ strong topology ノ定義ト一致スル。weak uniform topology モ通常ノ weak topology ト一致スル。

定理1. $\mathfrak{F} \subset \overline{B}$ ガ weakly totally bounded ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ，$\mathfrak{F}$ガ strongly bounded ナルコト，スナハチ $f \in \mathfrak{F}$ ニツイテ $|f| \leqq C < +\infty$ ナル常數Cガ存在スル事デアル。

証明.[2] 先ヅ $\mathfrak{S}$ ガ weakly totally bounded トスル. 然ルトキハ x_0 ヲ一ツ定メレバ $|f(x_0)|$ ハ f ガ $\mathfrak{S}$ ヲ動クトキ有界デアル。従ッテ

$$|f| = \frac{1}{c} \overline{\lim_{|x| \leqq c}} |f(x)|;$$

$$|f(x)| \leqq |f(x+x_0)| + |f(x_0)|$$

デアルカラ, $|f|$ ガ有界ナコトヲ言フニハ, 或球: $\mathfrak{K} = (x + x_0; |x| < c)$ ニ於テ $|f(x)|$ ガ一様ニ有界ナコトヲ示セバヨイ。コノタメニ $|f(x)|$ ガ假ニ如何ナル $\mathfrak{K}$ ニ於テモ一様ニ有界デナイトシテ見ル. 然ルトキハ f_n, $(n=1,2,\cdots\cdots)$ 及ビ, $\mathfrak{K}_n$, $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ

$$\mathfrak{K}_n^b \subset \mathfrak{K}_{n-1}; \quad \lim_n (\mathfrak{K}_n \text{ノ直径}) = 0$$

且ツ

$$|f_n(x)| \geqq n, \quad x \in \mathfrak{K}_n$$

ナル様ニ定メル事ガ出來ル. B ハ完全デアルカラ, $x_0 = \lim_n \mathfrak{K}_n$ ガ存在スル. x_0 ハスベテノ $\mathfrak{K}_n$ ニ含マレル. 故ニ $\lim_n |f_n(x_0)| = +\infty$. コレハ矛盾デアル。——— 故ニ $|f|$ ハ有界デアル.

逆ニ $\mathfrak{S}$ ガ strongly bounded デアルトスレバ, $x \in \mathfrak{X}$ ノトキ, $f(x)$ ノ range ハ一様ニ有界デアル. 故ニ Nr. 5 定理 1 ニヨッテ, $\mathfrak{S}$ ハ weakly totally bounded デアル。

$\mathfrak{S} \subset \overline{B}$ ガ $(\mathfrak{X})$-totally bounded ナラバ, $\mathfrak{S}$ ニ於テ $(\mathfrak{X})$-一様位相ハ弱イ一様位相ト一致シ, 従ッテ $\mathfrak{S}$ ハ

weakly totally bounded トナル. 故ニ

定理2. $\mathfrak{S}$ ガ $(\mathfrak{X})$- totally bounded ナラバ, $\mathfrak{S}$ ハ strongly bounded デアル。

定理3. $\overline{B}$ ハ $(\mathfrak{X})$- topologically complete デアル。

証明: (f_λ) ヲ $(\mathfrak{X})$- totally bounded ナ fundamental d. s. p. トスレバ, $|f_\lambda| \leqq C < +\infty$ デアッテ, $x \in B$ ヲ定メレバ $(f_\lambda(x))$ ハ fundamental デアル。

故ニ $\lim\limits_{\lambda} f_\lambda(x) = f(x)$ ガ存在スル. $\lim\limits_{\lambda} f_\lambda = f$ ハ $(\mathfrak{X})$-, 従ッテ weakly convergent デアル. 故ニ $f(x)$ ハ linear デアッテ, $|f_\lambda(x)| \leqq C$ $(x \in \mathfrak{X})$ ヨリ $|f(x)| \leqq C$ $(x \in \mathfrak{X})$; スナハチ $f \in \overline{B}$. 故ニ $\overline{B}$ ハ $(\mathfrak{X})$- topologically complete デアル。

ヨク知ラレテヰル如ク, $\overline{B}$ ノ conjugate space ヲ $\overline{\overline{B}}$ トスレバ, $\overline{\overline{B}} \supset B$ デアッテ, $\overline{\overline{B}}$ ニ於ケル weak topology ハ, B ノ weak topology トイハレル. B ガ regular ナラバ, 従ッテ weakly topologically complete デアル。

Goldstein ハ B ガ regular ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ, B ガ δ- weakly complete ナ事ナルコトヲ示シタ。[3] 定理1ト3ニヨッテ strongly bounded-

3) Goldstein: Weakly complete Banach spaces, Duke Math. J. 4. (1938)

ness ハ weakly totally boundedness ト一致スル。従ッテ δ-weakly completeness ハ topologically completeness ト一致スル．故＝

Goldstein ノ定理: Bガregular ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ, Bガ weakly topologically complete ナルコトデアル。

Goldstein ノ証明ノ方法ハBが $\overline{\overline{B}}$＝於テ weakly regularly dense ナルコトヲ示スノデアル。

$\overline{B}$ ノ任意ノ linear functional ヲ F (bounded デナクテモヨイ) トスレバ，容易＝分ル如ク，任意ノ $f_i \in \overline{B}$ $(i=1, 2, \cdots\cdots n)$ ＝對シテ，$\varepsilon>0$ ヲ如何＝小サクトッテモ，$|F(f_i)-f_i(x)|<\varepsilon$ $(i=1, 2, \cdots\cdots n)$ ナル $x\in B$ ガアル。スナハチ $\overline{B}$ ノ linear functional 全体ノ space ヲ L $(\supset \overline{\overline{B}})$ トスレバ，B ハ L ＝於テ weakly dense デアル．故＝Bが weakly complete ナラバ $B=L$ デナケレバナラナイ．$\overline{B}$ ノ „Hammel ノ base“ ヲ考ヘ，コレヲ $(f_\tau;\ \tau=1, 2, \cdots\cdots \omega, \cdots\cdots)$ トスル。

然ルトキハ ξ_τ ヲ任意＝與ヘタトキ，$F(f_\tau)=\xi_\tau$ ナル $F\in L$ が定マル．$|f_\tau|=1$ ナルヤウ＝定メテオケバ，$F(f_\tau)=f_\tau(x)$ ナル $x\in B$ が存在スルカラ，

$|\xi_\tau|=|F(f_\tau)|=|f_\tau(x)|\leqq|x|$． 故＝ $|\xi_\tau|$ ハ有界デナケレバナラナイ．故＝ f_τ ノ個數ハ有限個デアッテ，$\overline{B}$，従ッテ B ハ有限階デナケレバナラナイ。スナハチ weakly complete ナ Banach 空間ハ有限階ノ空間＝限ルノデアル。[4)]

4) G. Birkhoff: Moore-Smith convergence in general topology.

コレニ反シテ *regular* ナ Banach 空間ハ *weakly topologically complete* デアル．*topologically complete* ナル概念ノ重要ナコトガ之レニヨッテ分ル。

7. 群ノ上ノ概週期函數．I．平均値

群 $\mathfrak{G}$ ニ於テ

1° $\mathfrak{U}_\alpha^{-1} = \mathfrak{U}_\alpha$, $\mathfrak{U}_\alpha \ni 1$.

2° α, β ニ對シテ $\mathfrak{U}_\gamma \subset \mathfrak{U}_\alpha \frown \mathfrak{U}_\beta$ ナル γ ガ存在スル。

3° α ニ對シテ $\mathfrak{U}_\gamma^2 \subset \mathfrak{U}_\alpha$ ナル γ ガ存在スル．

ナル三條件ヲ滿足スル „單位元ノ近傍系" ガ與ヘラレタトキ

$$\mathfrak{U}_\alpha(x) = \mathfrak{U}_\alpha \cdot x$$

ヲ以テ x ノ近傍系ヲ定義スレバ，$\mathfrak{G}$ ニ，コノ近傍系ニヨッテ *uniform topology* ガ導入セラレル．コレハ *right invariant* デアル：

$$\mathfrak{U}_\alpha(x) \cdot a = \mathfrak{U}_\alpha(xa)$$

ソコデコレヲ *right invariant* ナ *uniform topology* ト名付ケル。[1)]

$\mathfrak{U}_\alpha$ ガ更ニ

4°. $x\,\mathfrak{U}_\alpha x^{-1} = \mathfrak{U}_\alpha$

ヲ滿足スルトキハ，$\mathfrak{U}_\alpha \cdot x = x\,\mathfrak{U}_\alpha$ ダカラ，*uniform*

---

1) 詳シクハ A. Weil: *Sur les espaces à structure uniforme* 參照．

topology ハ更ニ left invariant トナル。4° ヲ満足スル uniform topology ヲ invariant uniform topology トヨブコトニスル。

right invariant ナ topology ニ関シテハ $\mathfrak{G}$ ハ必ズシモ topological group トナラナイガ, invariant ナ uniform topology ニ関シテハ group ノ演算

$$x^{-1}y$$

ガ一様連続ニナル. $\mathfrak{G}$ ハ言ハバ uniform topological group トナルノデアル。

right invariant uniform topology ガ $(\mathfrak{U}_\alpha)$ ニヨッテ與ヘラレタトキ, コレカラ invariant uniform topology ヲ導クーツノ方法ハ

$$\mathfrak{U}_\alpha^* = \prod_{x \in \mathfrak{G}} \cap\, x\, \mathfrak{U}_\alpha x^{-1}$$

ニヨッテ 4° ヲ満足スル $\mathfrak{U}_\alpha^*$ ヲ作ルノデアル。$\mathfrak{U}_\alpha^*$ ノ意味ハ次ノ様ニ解釈サレル: $a \in \mathfrak{G}$ ヲ, $\mathfrak{G}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ニ寫ス Abbildung:

$$x \longrightarrow x \cdot a$$

ヲ現ハスモノト考ヘル. カク考ヘタトキノ, a ノ $\mathfrak{G}^{\mathfrak{G}}$ ニ於ケル strong topology トシテノ $\mathfrak{U}_\alpha$ ニ對應スル近傍ガ $\mathfrak{U}_\alpha^*$ トナルノデアル。[2] 實際ニ

2) Nr. 5 参照

$$\mathfrak{U}^*_\alpha \cdot a = (b;\ x\,b \in \mathfrak{U}_\alpha x\ a,\ x \in \mathfrak{G})$$

デアル。

$x \rightarrow x \cdot a$ ナル Abbildung ハ，明ラカニ同程度ニ一様連続デアルカラ，Nr. 5 定理5ヨリ直チニ次ノ定理ヲ得ル：

定理1. $\mathfrak{G}$ ガ $(\mathfrak{U}_\alpha)$ ニヨッテ定メラレタ right invariant uniform topology ニ関シテ totally bounded ナラバ，$(\mathfrak{U}_\alpha)$ カラ導カレタ $(\mathfrak{U}^*_\alpha)$ ニヨッテ定メラレル invariant uniform topology ニツイテモ totally bounded デアル。

$\mathfrak{G}$ ニ right invariant ナ距離函数系：

$$\rho^r_k(x\ \ y),\quad \rho^r_k(xa\ \ ya) = \rho^r_k(x\ \ y)$$

（上ノ inden r ハ right invariant ナ事ヲ示ス）ガ與ヘラレタトキ

$$\rho^r_k(x) = \rho^r_k(x\ \ 1)$$

トオケバ，(ρ^r_k) デ定メラレル uniform topology ハ

$$\mathfrak{U}^r_{k_1,\cdots\cdots k_l\,\varepsilon} = (x;\ \rho^r_{k_j}(x) < \varepsilon,\ j = 1, 2, \cdots\cdots l)$$

ナル近傍系デ與ヘラレル。コノトキ

$$\rho_k(x\ \ y) = \overline{\operatorname{fin}}_{a \in \mathfrak{G}}\ \rho^r_k(ax\ \ ay)$$

トオイテ，(ρ_k) ヲ (ρ^r_k) カラ導ビカレタ invariant ナ距離函数系トヨブコトニスレバ，容易ニ分ル如ク，(ρ_k)

ニ對應スル近傍系ハ丁度 $(\mathfrak{U}^{r}_{k_1,\cdots\cdots k_\ell\varepsilon})$ カラ導ビカレタ近傍系 $(\mathfrak{U}^{*}_{k_1,\cdots\cdots k_\ell\varepsilon})$ トナル．故ニ定理1ノ特別ノ場合トシテ

定理1'. $\mathfrak{G}$ ガ *right invariant* ナ距離函數系 (ρ^{r}_{k}) ニ關シテ *totally bounded* ナラバ (ρ^{r}_{k}) カラ導ビカレタ *invariant* ナ (ρ_{k}) ニ關シテモ *totally bounded* デアル。

$\mathfrak{L}$ ヲ $(|u|_k)$ ヲ *norm* 系トスル *topologically complete* ナ一般 *Banach* 空間トシ，$\mathfrak{G}$ デ定義サレタ $\mathfrak{L}$ ノ値ヲトル有界ナ函數 $f(x)$ ヲ考ヘル．但シコンデ有界トイフノハ，各 k ニツイテ $|f(x)|_k$ ガ有界トイフ意味デアル．

$$\rho^{r}_{fk}(x\quad y)=\overline{\mathrm{fin}}_{a\in\mathfrak{G}}\,|f(xa)-f(ya)|_k$$

及ビ

$$\rho_{fk}(x\quad y)=\overline{\mathrm{fin}}_{a\in\mathfrak{G}}\ \rho^{r}_{fk}(ax\quad ay)$$

$$=\overline{\mathrm{fin}}_{a,b\in\mathfrak{G}}\,|f(axb)-f(ayb)|_k$$

トオク。

コノ ρ^{r}_{fk} ヲ用ヒテ $f(x)$ ガ *a. p.* (*almost periodic*) デアルトイフコトヲ次ノ様ニ定義スル：

定義 I^r. 距離函數系 (ρ^{r}_{fk}) ニ關シテ $\mathfrak{G}$ ガ *totally bounded* ナルトキ；$f(x)$ ハ $\mathfrak{G}$ デ *a. p.* デアルトイフ。

定理1' ニヨレバコノ定義ハ次ノ定義ト同値デアル：

定義I. 距離函數系 ($\rho_{f\kappa}$) ニ関シテ $\mathfrak{G}$ ガ totally bounded ナルトキ, $f(x)$ ハ $\mathfrak{G}$ デ a. p. デアルトイフ。

明ラカニ, コノトキ $f(x)$ ハ ($\rho^{r}_{f\kappa}$) 乃至 ($\rho_{f\kappa}$) デ定メラレル $\mathfrak{G}$ ノ uniform topology ニ関シテ一様連続デアル. 逆ニ $\mathfrak{G}$ ニ於テ right invariant 或ハ invariant ナ uniform topology ガ定義サレテ井テ, コレニ関シテ $\mathfrak{G}$ ガ totally bounded ナルトキ, $f(x)$ ガコノ topology ニツイテ一様連続ナラバ $\rho^{r}_{f\kappa}$ 乃至 $\rho_{f\kappa}$ モ亦一様連続トナリ, 従ツテ $\mathfrak{G}$ ハ $\rho^{r}_{f\kappa}$ 乃至 $\rho_{f\kappa}$ ニ関シテ totally bounded トナルカラ, $f(x)$ ハ a. p. デナケレバナラナイ. 故ニ定義I或ハ I^{r} ハ次ノ様ニ言フ事ガ出来ル:

定義II^{r}. $f(x)$ ガ $\mathfrak{G}$ ニ於ケル right invariant 且ツ totally bounded ナ uniform topology ニ関シテ一様連続ナルトキ $f(x)$ ハ a. p. デアルトイフ。

定義II $f(x)$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ invariant 且ツ totally bounded ナ uniform topology ニ関シテ一様連続ナトキ $f(x)$ ハ a. p. デアルトイフ。

Nr. 4. 定理6ニヨレバ $\mathfrak{G}$ ガ (ρ_{κ}) ニ関シテ totally bounded トナルタメニハ, $\mathfrak{G}$ ガ各 ρ_{κ} ニ関シテ totally bounded ナルコトガ必要且ツ充分デアル. 従ツテ $\mathfrak{G}$ ニ於テ幾ツカノ a. p. function $f_{\lambda}(x)$ ガ與ヘラレタトキ, スベテノ $\rho_{f_\lambda \kappa}$ ヲ合併シテ得ラレル距離函

數系 $(\rho_{f_\lambda k})$ ヲ考ヘレバ, $\mathfrak{G}$ ハ $(\rho_{f_\lambda k})$ ニ關シテ totally bounded デアッテ, 又明ラカニ $f_\lambda(x)$ ハ $(\rho_{f_\lambda k})$ ニツイテ一樣連續デアル. コノ事カラ容易ニ次ノ二定理ガ得ラレル;

定理 2. $f_\lambda(x)$ $(\lambda=1, 2, \ldots\ldots \Lambda)$ ガ夫々 $\mathcal{L}_\lambda$ ノ値ヲトル $\mathfrak{G}$ ノ上ノ a. p. ナ函數, $u = u(u_1, \ldots\ldots u_\Lambda)$ ガ $u_\lambda \in \mathcal{L}_\lambda$ ニツイテ一樣連續ナ函數ナルトキ, $u(x) = u(f_1(x) \ldots\ldots f_\Lambda(x))$ ハ a. p. デアル. 特ニ $f(x)$, $g(x)$ ガ a. p. ナルトキ $f \pm g$ モ a. p., 又 $f(x)$ 及ビ numerical function $\alpha(x)$ ガ a. p. ナルトキ $\alpha(x) f(x)$ ハ a. p. デアル。

證明ハ定義 II カラ明ラカデアル。

定理 3 directed set of function $f_\lambda(x) (\in \mathcal{L}^{\mathfrak{G}})$ ガ $f(x)$ ニ一樣ニ收斂スルトキ, 各 $f_\lambda(x)$ ガ a. p. ナラバ $f(x)$ モ a. p. デアル.

又 (ρ_{fk}) ニ關シテハ $\mathfrak{G}$ ノ演算ハ一樣連續デアルカラ

定理 4. $f(x)$ ガ a. p. ナラバ $f(ax)$, $f(x^{-1})$, etc. ハ a. p. デアル, 又 $f(x^{-1}y)$ etc. ハ $\mathfrak{G} \otimes \mathfrak{G}$ ノ上ノ函數トシテ a. p. デアル。

證明: $f(x^{-1})$, $f(x^{-1}y)$, etc. ハスベテ (ρ_{fk}) ニツイテ一樣連續デアルカラ, 定義 II ニヨッテ a. p. デアル.

次ニ平均値ノ存在ヲ証明スル。[3] $\mathfrak{L}$ ノ部分集合 A ニ對シテ $C_v A$ ヲ

$$C_v A = (\sum \alpha_j u_j ;\ \alpha_j \geqq 0,\ \sum \alpha_j = 1,\ u_j \in A)$$

ト定義スル．然ルトキハ

定理5. A ガ totally bounded ナラバ $C_v A$ モ totally bounded デアル。

証明ハ殆ンド明白デアル。

$f(x)$ ガ a.p. ナルトキ

$$W_f = f(\mathfrak{G})$$

トオケバ，W_f ハ totally bounded ナ $\mathfrak{G}$ ノ一様連続ナ像デアルカラ totally bounded デアリ，從ッテ

$$C_v W_f$$

モ totally bounded デアル。

a.p. function $f(x)$ ヲ一ツ定メテ考ヘル．有限個ノ元 $x_1, \cdots\cdots x_m \in \mathfrak{G}$ ヲ任意ニトッテ

$$\varphi_x(a, b) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} f(a x_j b)$$

ナル函數 φ_x ヲ作リ，コノ様ナ函數ノ全体ヲ Φ トスル．然ルトキハ

---

3) S. Bochner, and J. von Neumann: Almost periodic functions in groups, II. Trans. of Am. Math. Soc. Vol. 37, 1935 參照．以下ノ証明ハコノ Bochner ト Neumann ノ証明ヲ吾々ノ言葉ヲ使ッテ言ヒ換ヘタモノデアル。

補助定理: 任意ノ $K_1, K_2 \cdots\cdots K_h$, $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$\mathrm{Osc}_{K_l}\,\varphi_x = \overline{\mathrm{fin}}_{ab}\ \overline{\mathrm{fin}}_{a'b'} \left| \varphi_x(a\ \ b) - \varphi_x(a'\,b') \right|_{K_l} < \varepsilon$$

ナル $\varphi_x \in \Phi$ ガ存在スル。

證明: 簡單ノタメ

$$|u|_K = |u|_{K_1} + |u|_{K_2} + \cdots\cdots + |u|_{K_h}$$

トオク. uniform topology ニ關シテハ $|u|_{K_1} \cdots\cdots |u|_{K_h}$ ヲ $|u|_K$ デ置換ヘテヨイ。$\varphi_x(a\ \ b)$ ガ Φ ノ函數ナルトキ, $\varphi_x(a y_j\ \ y_k b)$ モ Φ ニ屬シ,

$$\varphi_{yxy}(a\ \ b) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_x(a y_j\ \ y_k b)$$

モ亦 Φ ニ屬スル. 然ルニ

$$\left| \varphi_x(a\ \ b) - \varphi_x(a'\ \ b') \right|_K$$

$$\leqq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\left| f(a x_j\, b) - f(a x_j\, b') \right|_K + \left| f(a x_j\, b') - f(a' x_j\, b') \right|_K \right)$$

ヨリ明ラカナル如ク

$$\rho_{fK}(a, a') < \frac{\varepsilon}{2},\ \rho_{fK}(b\ \ b') < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ナラバ}$$

$$\left| \varphi_x(a\ \ b) - \varphi_x(a'\ \ b') \right| < \varepsilon$$

デアル. スナハチ Φ ハ同程度ニ一樣連續ナ函數屬デアル。

$\mathfrak{G}$ ハ ρ_{fK} ニツイテ totally bounded ダカラ ρ_{fK} ニ關スル $\frac{\varepsilon}{2}$-Netz ガアル. コレヲ

$$y_1, y_2 \cdots\cdots y_n$$

トスル. 然ルトキハ, ρ_{fK} ガ invariant ナ事カラ, a, b, a', b' ヲ任意ニ與ヘタトキ

$$\rho_{f_k}(ay_1\ \ a'y_s) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \rho_{f_k}(y_1 b\ \ y_t b') < \frac{\varepsilon}{2}$$

ナル. s, t が存在スル. 故ニ

$$|\varphi_{yxy}(a\ \ b) - \varphi_{yxy}(a'\ \ b')|$$

$$= \frac{1}{n^2}\left|\sum\sum \varphi_x(ay_j\ \ y_k b) - \sum\sum \varphi_x(a'y_j\ \ y_k b')\right|$$

$$\leqq \frac{1}{n^2}|\varphi_x(ay_1\ y_1 b) - \varphi_x(a'y_s\ \ y_t b')| + \frac{n^2-1}{n^2}\,\mathrm{Osc}_k\,\varphi_x$$

ニ於イテ

$$|\varphi_x(ay_1\ \ y_1 b) - \varphi_x(a'y_s\ \ y_t b')| < \varepsilon$$

トナルカラ

$$\mathrm{Osc}_k\,\varphi_{yxy} \leqq \mathrm{Osc}_k\,\varphi_x - \frac{1}{n^2}(\mathrm{Osc}_k\,\varphi_x - \varepsilon).$$

n ハ ε ノミニ関係シテ定マル. 故ニ

$$B = \underset{\varphi_x \in \Phi}{\mathrm{fin}}\ \mathrm{Osc}_k\,\varphi_x$$

トスレバ

$$B \leqq \varepsilon$$

故ニ $B = 0$ デナケレバナラナイ。

コノ補助定理ニヨッテ

$$W_{k_1 k_2 \cdots\cdots k_h}\varepsilon$$

$$= (\varphi_x(a, b)\,;\ a \in \mathfrak{g},\ b \in \mathfrak{g},\ \mathrm{Osc}_{k_l}\,\varphi_x < \varepsilon,\ 1 \leqq l \leqq h)$$

トオケバ, $W_{k_1 \cdots\cdots k_h}\varepsilon$ ハ空集合デハナイ. 又明ラカニ

$\varepsilon' \leqq \varepsilon$ ナラバ $\quad W_{k_1 \cdots\cdots k_h \cdots\cdots k_{h+r}}\varepsilon' \subset W_{k_1 \cdots k_h}\varepsilon$

デアルカラ, Π' デ有限積ヲ現ハス事ニスレバ

1° $\quad \Pi' W_{k_1 \cdots\cdots k_h}\varepsilon \neq 0$

次ニ，$Osc_{\kappa_l}\varphi_x<\varepsilon$，$Osc_{\kappa_l}\varphi_y<\varepsilon$ トスレバ

$$\left|\varphi_x(a\quad b)-\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}f(cx_j\cdot d)\right|_{\kappa_l}<\varepsilon$$

$$\left|\varphi_y(a'\quad b')-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(cy_k d)\right|_{\kappa_l}<\varepsilon$$

ヨリ

$$\left|\varphi_x(a\quad b)-\frac{1}{nm}\sum_j\sum_k f(x_j\cdot y_k)\right|_{\kappa_l}<\varepsilon$$

$$\left|\varphi_y(a'\quad b')-\frac{1}{nm}\sum_j\sum_k f(x_j\cdot y_k)\right|_{\kappa_l}<\varepsilon$$

ヲ得ルカラ

$$|\varphi_x(a\quad b)-\varphi_y(a'\quad b')|_{\kappa_l}<2\varepsilon$$

故ニ，d_{κ_l} ヲ以テ直徑ヲ現ハスコトニスレバ

2°　$d_{\kappa_l}(W_{\kappa_1\cdots\cdots\kappa_h\varepsilon})\leqq 2\varepsilon$

1° ト 2° ハ $(W_{\kappa_1\cdots\cdots\kappa_h\varepsilon})$ ガ Cauchy family ナルコトヲ示ス．明ラカニ

$$W_{\kappa_1\cdots\cdots\kappa_h\varepsilon}\subset C_v W_f\subset (C_v W_f)^b$$

デアッテ，$C_v W_f$ ハ totally bounded，從ッテ $(C_v W_f)^b$ ハ complete デアルカラ $(W_{\kappa_1\kappa_2\cdots\cdots\kappa_l\varepsilon})$ ハ一點ニ收斂スル．コノ極限ヲ $f(x)$ ノ平均値ト呼ビ Mf デ現ハス：

$$Mf=\underset{x}{M}f(x)=\lim W_{\kappa_1\cdots\cdots\kappa_h\varepsilon}$$

Mf ハ $(W_{\kappa_1\cdots\cdots\kappa_l\varepsilon})^b$ ニ含マレルカラ，φ_x ヲ適當ニトッテ

$$|Mf-\varphi_x(a\quad b)|_{\kappa_l}\leqq 2\varepsilon$$

ナラシメルコトガ出来ル．逆ニ任意ノ $k_1 \cdots\cdots k_h$，ε ニ對シテ

$$|M - \varphi_x(a\ \ b)|_{k_l} < \varepsilon$$

ナル φ_x ガ存在スルナラバ，$\mathrm{Osc}_{k_l}\varphi_x \leqq 2\varepsilon$ トナルカラ，$M = Mf$ デナケレバナラナイ．故ニ

定理 6.　$f(x)$ ノ平均値ヲ Mf トスレバ，任意ノ $k_1 \cdots\cdots k_h$，$\varepsilon > 0$ ニ對シテ，$x_1\ x_2 \cdots\cdots x_m$ ヲ適當ニ選ンデ，a, b ノ如何ニ関セズ

$$\left|Mf - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} f(a x_j \cdot b)\right|_{k_l} < \varepsilon$$

ナラシメルコトガ出来ル．逆ニ，コノ様ナ constant Mf ハ平均値ノ他ニハナイ。

コノ定理 6 カラ容易ニ次ノ定理ガ得ラレル：

定理 7.

i)　$f(x) = u$ ナラバ　$\underset{x}{M} f(x) = u$

ii)　$M(\alpha f + \beta g) = \alpha Mf + \beta Mg$

iii)　$\underset{x}{M} f(ax\ b) = \underset{x}{M} f(x)$

iv)　$\underset{x}{M} f(x^{-1}) = \underset{x}{M} f(x)$

v)　$\underset{x}{M} |f(x)|_k \geqq \left|\underset{x}{M} f(x)\right|_k$

$\phi(x)$ ガ numerical a. p. function ナルトキ

$$\left|\underset{y}{M}\phi(y) f(y^{-1}x) - \underset{y}{M}\phi(y) f(y^{-1}z)\right|_k$$

$$\leqq \underset{y}{M} |\phi(y)| \, | f(y^{-1}x) - f(y^{-1}z)|_K \leqq \rho_{fK}(x\ z) \underset{y}{M} |\phi(y)|$$

故ニ $\underset{y}{M}\, \phi(y) f(y^{-1}x)$ ハ x ノ a. p. function デアル.

コレヲ

$$\phi \times f(x)$$

デ現ハス. 明ラカニ

$$\phi \times f(x) = \underset{y}{M}\, \phi(y) f(y^{-1}x) = \underset{y}{M}\, \phi(xy^{-1}) f(y)$$

8. 群ニ於ケル概週期函數 II. 近似ノ理論

一般ニ $\rho(x\ y) = \rho(xy^{-1})$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ totally bounded 且ツ invariant ナ metric ナルトキ, $\rho(x)$ ハ ρ ニツイテ一様連続, 從ツテ a. p. デアルカラ

$$\omega_\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad t \geqq \delta \\ 1 - \dfrac{2t}{\delta} & \quad 0 \leqq t < \delta \end{cases}$$

トスレバ, $\omega_\delta(\rho(x))$ モ a. p. デアッテ

$$\Delta_\delta(\rho; x) = \frac{\omega_\delta(\rho) \times \omega_\delta(\rho(x))}{[\underset{x}{M}\, \omega_\delta(\rho(x))]^2}$$

トオケバ, $\Delta_\delta(\rho; x)$ ハ次ノ性質ヲ有スル.

1) $\Delta_\delta(\rho; x) \geqq 0$

2) $\underset{x}{M}\, \Delta_\delta(\rho; x) = 1$

3) $\rho(x) \geqq \delta$ ナラバ $\Delta_\delta(x) = 0$

4) $\Delta_\delta(\rho; x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\delta\nu}\, l_\nu(x)$

但シココデ $\ell_\nu(x)$ ハ，$\mathcal{G}$ ノ既約 unitary 表現
$D^{(\nu)}(x)=(d_{ik}(x))$ カラ

$$\ell_\nu(x)=n^{(\nu)}\sum_i d_{ii}(x),\quad n^{(\nu)} \text{ ハ } D^{(\nu)}, \text{ Grad}$$

ニヨッテ作ラレタ函数トスル．$\alpha\delta_\nu$ ハ

$$0\leqq\alpha\delta_\nu\leqq 1$$

ナル constant デ

$$\lim_{\delta\to 0}\alpha\delta_\nu=1$$

デアル．又 4) ナル級數ハ絶對且ツ一様ニ收斂スル。

簡單ノタメ，$k_1 k_2 \cdots\cdots k_h$ 及ビ正數 δ ノ組ヲ σ デ現ハスコトニスル．

$$\sigma=(k_1 k_2 \cdots\cdots k_h \delta)$$

(σ) ナル index ノ集合ハ，$\sigma=(k_1\cdots\cdots k_h \delta)$ 及ビ $\sigma'=(k_1'\cdots\cdots k_m'\delta')$ ニツイテ，各 k_j が或 k_ℓ' ト一致シ，且 $\delta>\delta'$ ナルトキ

$$\sigma<\sigma'$$

ト考ヘレバ，directed set トナル。

f ヲ與ヘラレタ a. p. function トシ

$$\rho f k_1\cdots\cdots k_h=\sum_{\ell=1}^{h}\rho f k_\ell$$

又

$$\Delta f\sigma(x)=\Delta f k_1\cdots\cdots k_h\delta(x)=\Delta_\delta(\rho f k_1\cdots k_h; x)$$

トオク．然ルトキハ k_ℓ ヲ σ ニ含マレル index ノ一ツトスレバ

$$|\Delta f_\alpha \times f(x) - f(x)|_{k_l} = |\underset{y}{M} \Delta f_\alpha (xy^{-1}) f(y) - f(x)|_{k_l}$$

$$= |\underset{y}{M} \Delta_{f_\alpha} (xy^{-1})(f(y) - f(x))|_{k_l} \leqq \underset{y}{M} \Delta_{f_\alpha}(xy^{-1}) |f(y) - f(x)|_{k_l}$$

ニ於テ

$\Delta f_\alpha (xy^{-1}) \neq 0$ ナラバ

$$|f(y) - f(x)|_{k_l} \leqq \rho_{f k_1} \cdots\cdots (x \quad y) \leqq \delta$$

デアルカラ

$$|\Delta_{f_\alpha} \times f(x) - f(x)|_{k_l} \leqq \delta \qquad (1 \leqq l \leqq h)$$

スナハチ

定理 1. $\lim\limits_{\alpha} \Delta_{f_\alpha} \times f(x) = f(x)$ （一様收斂）

然ルニ

$$\Delta f_\alpha = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\alpha\nu}\, l_{\alpha\nu}(x)$$

ハ絶對且ツ一様ニ收斂シテヰルカラ，N_α ヲ充分大キクトッテ

$$\left|\Delta_{f_\alpha}(x) - \sum_{\nu=1}^{N_\alpha} \alpha_{\alpha\nu}\, l_{\alpha\nu}(x)\right| < \delta$$

ナラシメルコトガ出來ル。コレヲ上ノ式ニ入レレバ

$$\left|\sum_{\nu=1}^{N_\alpha} \alpha_{\alpha\nu}\, l_{\alpha\nu} \times f(x) - f(x)\right|_{k_l} \leqq \delta\,(1 + \underset{x}{M} |f(x)|_{k_l})$$

故ニ

定理 2. $\lim\limits_{\alpha} \sum_{\nu=1}^{N_\alpha} \alpha_{\alpha\nu}\, l_{\alpha\nu} \times f(x) = f(x)$ （一様收斂）

コレデ明ラカニ

$$l_{\sigma\nu} \times f(x) = n^{(\sigma\nu)} \sum_{ij} \left(\underset{y}{M} f(y) \overline{d_{ij}^{(\sigma\nu)}(y)} \right) d_{ij}^{(\sigma\nu)}(x)$$

デアルカラ，定理2ハ a.p. ナ $f(x)$ ハ unitary 表現ノ一次結合ノ limit ナコトガ分ル。