851. 一様位相空間ニ就イテ, I

小平 邦彦（東大）

1. 一般距離空間ト一様位相空間、多クノ距離函數（*quasi metric*）$\rho_k(p\ q)$ ノ定義サレテオル空間 $\mathfrak{R}$ ヲ考ヘル。

(1) $\mathfrak{U}_{k_1 k_2 \cdots k_l \varepsilon}(p) = (q\,;\ \rho_{k_j}(q\ p) < \varepsilon,\ 1 \leqq j \leqq l)$

トオキ, $k_1 k_2 \cdots k_l \varepsilon$ ナル *indesc* ヲ一ツニマトメテ α ト書ケバ, $\mathfrak{U}_\alpha(p)$ ハ次ノ條件:

$$
(2)\begin{cases}
1^\circ \quad q \in \mathfrak{U}_\alpha(p) \text{ ナラバ } p \in \mathfrak{U}_\alpha(q), \\
2^\circ \quad \alpha, \beta \text{ ニ對シテ } \gamma \text{ ガ定マッテ,} \\
\qquad\qquad\qquad \mathfrak{U}_\gamma(p) \subset \mathfrak{U}_\alpha(p) \frown \mathfrak{U}_\beta(p). \\
3^\circ \quad \alpha \text{ ニ對シテ } \beta \text{ ガ定マッテ } p \in \mathfrak{U}_\beta(q), \\
\qquad q \in \mathfrak{U}_\beta(r) \text{ ナラバ } p \in \mathfrak{U}_\alpha(r);
\end{cases}
$$

ヲ滿足スル。A. Weil[1] ハ更ニ

4° $q \neq p$ ナラバ $\mathfrak{U}_\alpha(q) \not\ni p$ ナル α ガアル.

ナル條件ヲ考ヘ, $1^\circ \cdots\cdots 4^\circ$ ナル條件ヲ滿足スル〝近傍系〟$\{\mathfrak{U}_\alpha(p)\}$ ヲ *systéme uniforme de voisinages* ト名付ケ, コノ樣ナ近傍系ヲ有スル空間ヲ *espace uniforme* ト名付ケタ。吾々ハ條件 4° ヲ保留シテ, $1^\circ\ 2^\circ\ 3^\circ$ ナル條件ヲ滿足スル空間ヲ一様位相空

---

1) A. Weil: *Sur les espaces à structure uniforme et sur la Topologie générale.*

間ト呼ブコトニスル。一様位相空間ニ於テ

(3) $$q \in \prod_{\alpha} \mathfrak{U}_\alpha(p)$$

ナルニ点 p, q ヲ identifizieren シテ得ラレル[2]空間ヲ $\bar{\mathfrak{R}}$, 對應スル点, 及ビ近傍ヲ $\bar{p}$, $\bar{\mathfrak{U}}_\alpha(\bar{p})$ デ現ハセバ, $\bar{\mathfrak{R}}$ ハ $\bar{\mathfrak{U}}_\alpha$ ヲ近傍系トスル espace uniforme トナル。[3] $\bar{\mathfrak{U}}_\alpha(\bar{p})$ ハ明ラカニ 4° ヲ満足スルカラデアル。特ニ近傍系ガ (1) デ與ヘラレル espace uniforme ヲ一般距離空間ト呼ブ。

一様位相空間ハ $\{\mathfrak{U}_\alpha(p)\}$ ヲ近傍系トスル位相空間デアル。コノ意味デ offen, geschlossen, 連續性, etc. ガ定義サレル。[*)]

一様位相空間デハ又一様連続性ガ定義サレル。スナハチ $\mathfrak{R}$ ヲ $\mathfrak{R}'$ ノ中ヘ寫ス寫像 f ハ與ヘラレタ $\mathfrak{U}'_\alpha$ ニ對シテ, β ヲ適當ニ選ンデ p ノ如何ニ関セズ

(4) $$f(\mathfrak{U}_\beta(p)) \subset \mathfrak{U}'_\alpha(f(p))$$

ナラシメ得レトキ, f ハ　様連続デアルトイフ。特ニ f ガ一對一デアッテ, f ト f^{-1} ガ共ニ一様連続ナトキ, f ハ一様位相的デアルトイヒ, 一相位相的ナ変換 f デ不変ナ性質ヲ一様位相的ナ性質トヨブ。

---

2) (3) ナル p ト q ノ関係ハ, 1° 2° 3° ニヨッテ, 同値律ヲ満足シテヰルコトガ容易ニ確メラレル。

3) $\mathfrak{R}$ ノ一様位相的性質ハスベテ $\bar{\mathfrak{R}}$ ノ性質ニ帰着セシメラレル。

*) 集合 A ノ abgeschlossene Hülle (= Berührungsmenge) ヲ A^b デ現ハスコトニスル。

A. Weil ハ $\{\mathfrak{U}_\alpha(p)\}$ ノ定メル空間ノ一様位相的ナ性質ノ全体ヲ, uniform structure ト名付ケタ. 吾々ハコレヲ一様位相トヨブコトニスル。$\{\mathfrak{U}_\alpha(p)\}$ ト $\{\mathfrak{W}_\alpha(p)\}$ ナル二ツノ近傍系ハ, 同ジ一様位相ヲ與ヘルトキ同値[4] デアルトイフ。

空間ノ近傍系ガ (1) ナル形ニ與ヘラレテヰルトキ, (ρ_k) ヲ空間ノ距離函數系トヨブ。コノトキ $\mathfrak{R}$ ヲ $\mathfrak{R}'$ ヘ寫ス寫像 f ガ一様連続ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ, 與ヘラレタ ρ'_k 及ビ $\varepsilon'>0$ ニ對シテ $k_1, k_2 \ldots\ldots k_l$, $\varepsilon>0$ ヲ適當ニ選ンデ

(5) $\rho_{k_j}(p\ q)<\varepsilon$, $1\leqq j\leqq l$ ナラバ

$$\rho'_k(f(p)\ f(q))<\varepsilon'$$

ナラシメ得ル事デアル。

二ツノ距離函數系ハ對應スル近傍系ガ同値ナレトキ, 同値デアルトイツ. 對應スル近傍系ニヨツテ定メラレル空間ノ一様位相ヲ, 距離函數系ニヨツテ定メラレタ一様位相トヨブ。

A. Weil ハ, スベテノ一様位相ハ適當ナ距離函數系ニヨツテ與ヘラレルコトヲ示シタ。[4]

$\mathfrak{U}_\alpha$ ヲ各点 p ニ對シテ $\mathfrak{U}_\alpha(p)$ ナル集合ヲ對應サセル function ヲ現ハスモノト考ヘルコトガ出來ル。コノ意味デ, $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ部分集合 A ニ對シテ

(6) $\mathfrak{U}_\alpha(A)=\sum_{p\in A}\mathfrak{U}_\alpha(p)$

---

4) A. Weil 1)

トオク．更ニ

$$(7)\quad \mathfrak{U}_\sigma \cdot \mathfrak{U}_\tau(p) = \mathfrak{U}_\sigma(\mathfrak{U}_\tau(p))$$

ニヨッテ二ツノ function $\mathfrak{U}_\sigma$ ト $\mathfrak{U}_\tau$ ノ積 $\mathfrak{U}_\sigma \cdot \mathfrak{U}_\tau$ ヲ定義スル。[5] コノ記法ヲ使ヘバ一様位相空間ノ條件 3° ハ次ノ如ク現ハサレル：

$$(8)\quad \text{各 } \mathfrak{U}_\alpha \text{ ニ對シテ } \mathfrak{U}_\beta^2(p) \subset \mathfrak{U}_\alpha(p) \text{ ナル } \mathfrak{U}_\beta \text{ が存在スル.}$$

吾々ハ一般ニ，スベテノ p ニツイテ

$$\mathfrak{U}_\tau(p) \subset \mathfrak{U}_\sigma(p)$$

ナルトキ

$$(9)\quad \mathfrak{U}_\tau \subset \mathfrak{U}_\sigma$$

ノ如ク書ク事ニスル。[6]

2. Vollständigkeit.

„espace uniforme" ノ完全性ヲ論ズル方法ハ二ツアル。一ツハ A. Weil ノ Cauchy family ヲ用ヒル方法，一ツハ G. Birkhoff ノ所謂 Moore-Smith convergence [1] ヲ用ヒル方法デアル。コヽデコノ二ツノ方法ノ關係ヲ示シ，コレヲ併用スルコトニヨッテ幾分議論が簡單ニナルコトヲ示ス．——コノ Nr. デハ espace uniforme (4° ヲ滿足スル一様

---

5) A. Weil ハ $\mathfrak{U}_\lambda$ ヲ集合トシテ現ハシタ。

6) 同上

1) G. Birkhoff: Moore-Smith convergence in general topolog
Graves: On the completing of a Housdorff space

位相空間）ノミヲ考ヘ，コレヲ一般ニ $\mathcal{R}$ デ現ハスコトニスル。

G. Birkhoff ニ従ツテ條件

(d) 任意ノ $\lambda, \mu \subset (\lambda)$ ニ對シテ，$\lambda < \nu$，$\mu < \nu$ ナル $\nu \subset (\lambda)$ ガアル。

ヲ満足スル partially ordered set ヲ d. s. (directed set) ト名付ケ，d. s. (λ) ヲ index トスル点集合 (p_λ) ヲ d. s. p. (directed set of point) トヨブ。任意ノ点集合 (α) ガ與ヘラレタトキ，(α) ノ有限部分集合 Λ, M, etc. ノ全体ヲ考ヘ，$\Lambda \subset M$ ノトキ $\Lambda < M$ ト定義スレバ，(Λ) ハ d. s. トナル。コレヲ (α) カラ導ビカレタ d. s. トヨブ。

$\mathcal{R}$ ノ点カラ成ル d. s. p. (p_λ) ヲ考ヘル。任意ノ α ヲ與ヘタトキ，適當ニ μ ヲ選ンデ，スベテノ $\lambda > \mu$ ニ對シテ

(1) $\quad p_\lambda \in \mathfrak{U}_\alpha(p)$

ナラシメ得ルトキ，p_λ ハ p ニ収斂スルトイヒ，p ヲ p_λ ノ極限ト名付ケ，

(2) $\quad p = \lim\limits_{\lambda} p_\lambda$

デアラハス。又 α ニ對シテ，λ ヲ選ンデ，$\mu, \nu > \lambda$ ノトキ常ニ

(3) $\quad p_\mu \in \mathfrak{U}_\alpha(p_\nu)$

ナラシメ得ルトキ (p_λ) ハ fundamental デアルトイ

フ。一点ニ收斂スル (p_λ) ハ明ラカニ fundamental デアル。二ツノ fundamental ナ d.s.p. (p_λ), (q_λ) ハ，α ニ對シテ μ ヲ定メテ，$\lambda > \mu$ ナルスベテノ λ ニツイテ

(4) $\quad p_\lambda \in \mathfrak{U}_\alpha(q_\lambda)$

ナラシメ得ルトキ．互ニ同値デアルトイフ。$p = \lim\limits_{\lambda} p_\lambda$ トイフコトハ，(p_λ) ト一点 p ノミヨリ成ル d.s.p. が同値ナルコトト一致スル。コノ同値ナル概念ハ明ラカニ同値律ヲ滿足スル。同値ナル d.s.p. ハ同時ニ收斂シ，ソノ極限ハ一致スル。

スベテノ fundamental ナ d.s.p. が必ズ收斂スルトキ，$\mathfrak{R}$ ハ完全デアルトイフ。コレが G. Birkhoff ニヨル完全性ノ定義デアル。

A. Weil ノ完全性ヲコレト平行シテ論ズルタメ一次ノヤウナ概念ヲ導入スル：空間 $\mathfrak{R}$ ノ部分集合族 (C_α) —— α ハ單ナル index —— ハ

(D) $\quad C_\alpha$ ノ有限個ノ積ハ 0 デナイ：$\prod\limits_{j=1}^{l} C_{\alpha_j} \neq 0$

ナル條件ヲ滿足スルトキ D-family デアルトイフ。D-family (C_α) ハ任意ノ p ノ近傍 $\mathfrak{U}_\sigma(p)$ ニ對シテ

(5) $\quad C_\alpha \subset \mathfrak{U}_\sigma(p)$

ナル C_α ヲ含ムトキ，点 p ニ收斂スルトイヒ，p ヲ C_α ノ極

极限ト名付ケ

$$(6)\qquad p=\lim_{\alpha} C_\alpha$$

トカク．又，任意ノ α ニ對シテ

$$(7)\qquad p, q \in C_\alpha \quad \text{ナラバ} \quad p \in \mathfrak{U}_\alpha(q)$$

ナル C_α ヲ含ムトキ fundamental デアルトイフ。

A. Weil ハ fundamental ナ D-family ヲ Cauchy family ト名付ケタノデアル。明ラカニ一点ニ收斂スル D-family ハ Cauchy family デアル。コノ逆ガ成立ツトキ，$\mathfrak{R}$ ハ完全デアルトイフノデアル。スナハチ

スベテノ Cauchy family (fundamental ナ D-family) ガ收斂スルトキ $\mathfrak{R}$ ハ完全デアルトイフ。―― A. Weil ノ完全性ノ定義デアル。

(C_α) ガ Cauchy family ナルトキ，$p=\lim_{\alpha} C_\alpha$ トイフコトハ，定義ニヨレバ

$$(8)\qquad p \in \prod_{\alpha} C_\alpha^{b}$$

ト一致スル．コノ事実ハ後ニ利用スルコトガアル。

更ニ A. Weil ハ，二ツノ Cauchy family (C_α)，(C'_β) ハ，$(C_\alpha + C'_\beta)$ ガ又 Cauchy family ナルトキ，同値デアルト名付ケタ。吾々ニハ然シコノ同値ナル概念ハ殆ンド必要デナイ。

以上導入シタスベテノ概念ハ，スベテ一様位相的デアル。コノコトハ証明スルマデモナク明カデアラウ。

任意ノ d.s.p. (p_λ) ガ與ヘラレタトキ

(9) $\quad C_\lambda = (p_\mu;\ \mu > \lambda)$

トオケバ (C_λ) ハ D-family デアッテ，(p_λ) ガ fundamental ニ限ッテ（dann und nur dann!）fundamental デアリ，(p_λ) ガ收斂スルトキニ限ッテ收斂シ而モソノトキ

(10) $\quad \lim_\lambda C_\lambda = \lim_\lambda p_\lambda$

トナル。吾々ハ (C_λ) ヲ (p_λ) ニ屬スル D-family ト名付ケル。

逆ニ任意ノ D-family (C_α) ガ與ヘラレタトキ，(Λ) ヲ (α) カラ導カレタ d.s. トシ，各 Λ ニ對シテ

(11) $\quad p_\Lambda \in \prod_{\alpha \in \Lambda} C_\alpha$

ナル點 p_Λ ヲ一ツヅツ對應サセレバ，(p_Λ) ハ d.s.p. デアル．コレヲ (C_α) カラ導ビカレタ d.s.p. トヨブ。(C_α) ガ fundamental ナラバ明ラカニ (p_Λ) モ fundamental デアッテ，コノトキ (p_Λ) ハ (C_α) ガ收斂スルトキニ限ッテ收斂シ，而モ

(12) $\quad \lim_\Lambda p_\Lambda = \lim_\alpha C_\alpha$

デアル。[2)]

以上ノ結果ヲマトメテ次ノ様ニ言フコトガ出來ル。

---

2) (p_Λ) ガ fundamental デアッテモ (C_α) ハ必ズシモ fundamental デハナイ。

定理1. fundamental d. s. p. ト Cauchy family ハ收斂ニ關シテハ全ク同等デアル。

コノ事カラ直チニ G. Birkhoff ノ意味ノ完全性ト A. Weil ノ定義シタ完全性ガ一致スルコトガ分ル。[3)]

任意ノ一樣位相空間ハ，スベテノ fundamental d. s. p. ノ limit ヲ添加シテ完全ナ空間ニ擴張スルコトガ出來ル。[4)] コノ操作ヲ完全化トイヒ、又 $\mathfrak{R}$ ヲ完全化シテ得ラレタ空間 $\tilde{\mathfrak{R}}$ ヲモ亦 $\mathfrak{R}$ ノ完全化トヨブ。$\mathfrak{R}$ ハ $\tilde{\mathfrak{R}}$ ニ於テ überall dicht ナ空間ト一樣位相ノ意味デ同値デアル。逆ニ $\tilde{\mathfrak{R}}$ ハコノ條件ニヨッテ一意的ニ定マル。

定理2_1. $A \subset \mathfrak{R}$ トスル. $p \in A^b$ ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ，

$$\lim_{\alpha} C_\alpha = p, \quad C_\alpha \subset A$$

ナル Cauchy family (C_α) ガ存在スルコトデアル。

證明. 充分ナコトハ明白. 必要ナコトハ, $C_\alpha = A \frown \mathfrak{U}_\alpha(p)$ トオケバ分ル。コレヨリ定理1ニヨッテ

定理2_2.[5)] $p \in A^b$ ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ $\lim_{\lambda} p_\lambda = p$, $p_\lambda \in A$ ナル d. s. p. (p_λ) ガ存在スルコトデアル。

---

3) コレニツイテハ既ニ Graves ガ注意シテヰル; Graves: On the completing of a Hausdorff space, Annals of Math. Vol. 38. 61—64.

4) A. Weil: l. c. Graves: l. c.

5) G. Birkhoff: a. a. O. Theorem 1.

定理3. 完全ナ uniform space $\mathfrak{R}$ ノ部分集合Aガ完全ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハAガ $\mathfrak{R}$ デ閉ヂテヰル事デアル。

證明. 定理2ニカラ直チニ分ル。

3. *Totale Beschränktheit*. 一様位相空間 $\mathfrak{R}$ ハ，各 α ニ對シテ適當ニ有限個ノ点 $p_1, p_2 \cdots\cdots p_l$ ヲトッテ

$$(1) \qquad \mathfrak{R} = \sum_{j=1}^{l} \mathfrak{U}_\alpha(p_j)$$

ナラシメ得レトキ *total beschränkt* デアルトイフ[1)]。コレモ明カニ一様位相的ナ概念デアル。

先ヅ *total beschränkt* ナルタメノ必要且充分ナ條件ヲ述ベル。

定理1. $\mathfrak{R}$ ガ *total beschränkt* ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ，$\mathfrak{R}$ ノ任意ノ D-*family* (C'_γ) ニ對シテ

$$(*) \begin{cases} 1^\circ \ 各 C_\alpha ハ夫々或 C'_\gamma ニ含マレル: \ C_\alpha \subset C'_\gamma; \\ 2^\circ \ 各 C'_\gamma ハ夫々或 C_\alpha ヲ含ム: \ C'_\gamma \supset C_\alpha \end{cases}$$

ナル條件ヲ滿足スル *Cauchy family* (C_α) ガ存在スルコトデアル。

コノ條件ハ又 d. s. p. ニヨッテ現ハサレル．コレヲ示スタメニ

1) A. Weil l.c.

定義I. d.s.p. (p_λ) ノ部分集合 (p_{λ_Λ}) ガ Λ ヲ index トスル d.s.p. ナルトキ，λ_Λ ガ條件：

(2) 任意ノ M, μ ニ對シテ $\Lambda > M$, $\lambda_\Lambda > \mu$ ナル Λ ガ存在スルヲ満足スルナラバ，(p_{λ_Λ}) ハ (p_λ) ト cofinal デアルトイフ。[2)]

然ルトキハ

定理 I_2. $\mathfrak{R}$ ガ total beschränkt ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ，$\mathfrak{R}$ ノ任意ノ d.s.p. (p_λ) ガ cofinal ナ fundamental d.s.p. (p_{λ_Λ}) ヲ含ムコトデアル。

証明ハ次ノ如クスル：先ヅ

i) $\mathfrak{R}$ ガ total beschränkt ナラバ任意ノ D-family (C'_γ) ニ對シテ (*) ヲ満足スル Cauchy family (C_α) ガ存在スル；

コトヲ示ス。コノタメニ近傍系 $(\mathfrak{U}_\sigma(p))$ ヲ整列シテ

$$\mathfrak{U}_1(p),\ \mathfrak{U}_2(p) \cdots\cdots \mathfrak{U}_\omega(p) \cdots\cdots \mathfrak{U}_\sigma(p) \cdots\cdots,$$
$$\sigma < \Omega$$

トシ，index σ ヲ超限順序數ト考ヘ，σ ニツイテ帰納法ヲ用ヒル。各 σ ニ対シテ D-family $(C_\gamma^{(\sigma)})$ ヲ超限帰納法ニヨツテ

(a) $\tau < \sigma$ ナラバ $(C_\gamma^{(\tau)}) \subset (C_\gamma^{(\sigma)})$

ナル様ニ定義スル。先ヅ

$$(C_\gamma^{(0)}) = (C'_\gamma)$$

---

2) G. Birkhoff ノ cofinal ノ定義ノ一般化デアル。

トオク。次ニ $\tau < \sigma$ ナルスベテノ τ ニツイテ $(C_\gamma^{(\tau)})$ ガ定義サレタモノト假定スル。

コノトキ

(b) $\quad (C_\beta^*) = \sum_{\tau<\sigma} (C_\gamma^{(\tau)})$

トオケバ，(a) ニヨッテ明ラカニ (C_β^*) ハ D-*family* デアル。$\mathfrak{R}$ ガ *total beschränkt* ナルコトカラ，点 p ヲ適當ニ選ンデ

(c) $\quad C_\beta^{**} = C_\beta^* \frown \mathfrak{U}_\sigma(p)$

トオイタトキ，(C_β^{**}) ガ又 D-*family* ナルヤウニ出來ルコトガ分ル。何トナレバ，若シ然ラズトスレバ，各点 p ニ對シテ適當ニ有限個ノ $\beta = \beta_1(p), \beta_2(p) \cdots\cdots \beta_l(p)$ ヲ選ンデ

$$\prod_{j=1}^{l} C^*_{\beta_j(p)} \frown \mathfrak{U}_\sigma(p) = 0$$

ナラシメルコトガ出來ル。然ルニ $\mathfrak{R}$ ハ

$$\mathfrak{R} = \sum_{t=1}^{n} \mathfrak{U}_\sigma(p_t)$$

ト現ハサレル。故ニ

$$\prod_{t=1}^{n} \prod_{j=1}^{l} C^*_{\beta_j(p_t)} = \prod_{t=1}^{n} \prod_{j=1}^{l} C^*_{\beta_j(p_t)} \frown \sum_{t=1}^{n} \mathfrak{U}_\sigma(p_t)$$

$$\subseteqq \sum_{t=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{l} C^*_{\beta_j(p_t)} \frown \mathfrak{U}_\sigma(p_t) \right) = 0$$

コレハ (C_β^*) ガ D-*family* ナルコトニ反スル。——

カクノ如ク (C_β^{**}) ヲ定メテ

$$(d) \quad (C_\gamma^{(\sigma)}) = (C_\beta^{*}) \smile (C_\beta^{**})$$

トオケバ，$C_\beta^{**} \subset C_\beta^{*}$ ダカラ，明ラカニ $(C_\gamma^{(\sigma)})$ ハ D-family デ，又 (a) ヲ満足スル．又 (c) カラ分ル如ク $(C_\gamma^{(\sigma)})$ ハ

$$C_\beta^{**} \subset \mathfrak{U}_\sigma(p)$$

ナル C_β^{**} ヲ含ム．以上ノ結果カラ

$$(C_\alpha) = \sum_{\sigma < \delta_0} (C_\gamma^{(\sigma)})$$

トオケバ (C_α) ハ Cauchy family デアル。(C_α) ト (C'_β) ノ間ニ (*) ナル関係ガアルコトハ，ソノ構成カラ明ラカデアル。

ii) $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ D-family (C'_γ) ニ對シテ (*) ヲ満足スル Cauchy family (C_α) ガ存在スルナラバ，$\mathfrak{R}$ ノ各 d. s. p. (p_λ) ハ cofinal ナ fundamental d.s.p $(p_{\lambda_\wedge})$ ヲ含ム。

証明：　(p_λ) ニ属スル D-family ヲ (C'_λ) トシ，(C'_λ) ニ對シテ (*) ヲ満足スル Cauchy family ヲ (C_α) トシ，(C_α) カラ導ビカレタ d.s.p. ヲ $(p_\wedge)$ トスル。[3] $p_\wedge$ ハ明ラカニ (p_λ) ニ属スル；$p_\wedge = p_{\lambda_\wedge}$．カクノ如ク定義シタ $(p_{\lambda_\wedge})$ ガ fundamental ナコトハ (C_α) ガ fundamental ナコトカラ分ル。(p_λ) ト cofinal ナルコトハ次ノ如ク容易ニ分ル：$M = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_l)$ ト μ ガ與ヘラレタトスル．(*) ニヨッテ $C'_\mu \supset C_\alpha$ ナル α ガアル．

3) コノ言葉ノ定義ニツイテハ Nr. 2 参照。

故ニ $\Lambda = (\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_\ell \alpha)$ トオケバ

$$p_{\lambda_\Lambda} = p_\Lambda \in \prod_{\beta\in\Lambda} C_\beta \subset C_\alpha \subset C'_\mu$$

故ニ

$$\lambda_\Lambda > \mu$$

iii) $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ d.s.p. (p_λ) ガコレト cofinal ナ fundamental d.s.p. (p_{λ_Λ}) ヲ含ムナラバ $\mathfrak{R}$ ハ total beschränkt デアル。

何トナレバ，$\mathfrak{R}$ ガ total beschränkt デナイトスレバ，或ル σ ニ對シテハ，$p_1, p_2, p_3, \text{------}$ ナル無限個ノ点ヲ

$$j \neq k \text{ ナラバ } \quad p_j \notin \mathfrak{U}_\sigma(p_k)$$

ナル様ニ選ブコトガ出來ル。[4] (p_{j_Λ}) ヲ (p_j) ト cofinal ナ fundamental d.s.p. トスレバ，M ヲ ~~適當ニ~~ 定メテ

$$M < \Lambda \text{ ナラバ } \quad p_{j_\Lambda} \in \mathfrak{U}_\sigma(p_{j_M})$$

ナラシメルコトガ出來，又 cofinal 事カラ，Λ ヲ適當ニトッテ $j_\Lambda \neq j_M$ ナラシメルコトガ出來ル，コレハ矛盾デアル。

—— i) ii) iii) ニヨッテ定理 1, ト 1₂ ガ成立ツコトガ分ル。

定理 2. total beschränkt ナ空間ノ一様連續ナ Bild ハ又 total beschränkt デアル。

---

4) 順次ニ $p_{n+1} \notin \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{U}_\sigma(p_j)$ ナル点 p_{n+1} ヲトッテ行ケバヨイ。

証明. 定義カラ容易ニ分ル. スナハチ: $\mathfrak{R}$ ヲ total beschränkt ナ空間トシ, f ヲ一様連続ナ寫像, $\mathfrak{R}' = f(\mathfrak{R})$ トスル. 假定ニヨッテ $\mathfrak{U}'_\alpha$ が與ヘラレタトキ, $f(\mathfrak{U}_\alpha(p)) \subset \mathfrak{U}'_\alpha(f(p))$ ナル $\mathfrak{U}_\alpha$ が定マル。故ニ

$$\mathfrak{R} = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{U}_\alpha(p_j)$$

ナル p_j $(j = 1, 2 \cdots\cdots n)$ ノ存在カラ, $p'_j = f(p_j)$ トオケバ

$$\mathfrak{R}' = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{U}'_\alpha(p'_j)$$

ナルコトが分ル。

上記ノ定理 1, カラ直チニ次ノ重要ナ定理が得ラレル:

定理 3*) uniform space $\mathfrak{R}$ が bicompact ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ, $\mathfrak{R}$ が totally bounded デ且 complete ナル事デアル。

証明. 先ヅ $\mathfrak{R}$ が bicompakt デアルトスル. 然ルトキハ $\mathfrak{R} = \sum_{p} \mathfrak{U}_\alpha(p)$ ヨリ, $\mathfrak{R} = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{U}_\alpha(p_j)$ ナル $p_1\ p_2 \cdots\cdots p_n$ が存在シナケレバナラヌ。スナハチ $\mathfrak{R}$ ハ totally bounded デアル。又 (C_α) ヲ Cauchy family トスレバ, C_α^b ノ有限個ノ積ハ 0 デナイカラ, $\prod_\alpha C_\alpha^b \neq 0$ デナケレバナラナイ. $p \in \prod_\alpha C_\alpha^b$ トスレバ, $p = \lim_\alpha C_\alpha$; 故ニ

---

*) A. Weil l.c.

$\mathfrak{R}$ハ complete デアル。

逆ニ $\mathfrak{R}$ ガ totally bounded 且ツ complete トスル。然ルトキハ，(C'_γ) ヲ任意ノ D-family トスレバコレニ對シテ (*) ヲ滿足スル fundamental ナ D-family (C_α) ガアル．從ツテ，complete デアルカラ $p = \lim_\alpha C_\alpha$ ガ存在スル。故ニ，$p \in \prod_\alpha C_\alpha^b \subset \prod_\gamma C_\gamma'^b$ デアルカラ，$\prod_\gamma C_\gamma'^b \neq 0$. 故ニ $\mathfrak{R}$ ハ bicompact デアル。

J. von Neumann ニ從ツテ[5)]

定義 2. uniform space $\mathfrak{R}$ ハ，ソノスベテノ totally bounded ナ閉部分集合ガ bicompact ナルトキ，topologically complete デアルトイフ。

上記ノ定理 3 ニヨレバ，コノ定義ハ又次ノヤウニ言フコトガ出來ル。

定義 2'. uniform space $\mathfrak{R}$ ハ，ソノスベテノ totally bounded ナ閉部分集合ガ complete ナルトキ，topologically complete デアルトイフ。

明ラカニ complete ナ uniform space ハ topologically complete デアルガ，逆ハ成立シナイ．コノ事ニツイテハ又後ニ述ベル.

---

5) Topological linear space. Trans. 37. 1935

定理4. 一様位相空間 $\mathcal{R}$ ノ部分集合Aガ totally bounded ナラバ A^b モ totally bounded デアル。

証明. 與ヘラレタ $\mathfrak{U}_\sigma$ ニ對シテ $\mathfrak{U}_\tau^2(p) \subset \mathfrak{U}_\sigma(p)$ ナル $\mathfrak{U}_\tau$ ヲトッテ, $A \subset \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{U}_\tau(p_j)$ ナル p_j $(j=1, 2 \cdots\cdots n)$ ヲ定メル. 然ルトキハ明ラカニ

$$A^b \subset \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{U}_\tau^2(p_j) \subset \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{U}_\sigma(p_j).$$

故ニ A^b ハ totally bounded デアル。

定理5. uniform space $\mathcal{R}$ ガ topologically complete ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ, $\mathcal{R}$ ノスベテノ totally bounded ナ fundamental d. s. p. ガ收斂スルコトデアル。

證明ハ定理4カラ明白デアル。

uniform space $\mathcal{R}$ ガ與ヘラレタトキ, コレニスベテノ totally bounded ナ fundamental d. s. p. ノ ,, limit" ヲ添加シテ, topologically complete ナ space $\tilde{\mathcal{R}}$ ニ拡張スルコトガ出来ル。

一般ニ, uniform space $\mathcal{R}$ ノ部分集合Aハ, 任意ノ $p \in \mathcal{R}$ ニ對シテ, $\lim_\lambda p_\lambda = p$, $p_\lambda \in A$ ナル totally bounded ナ d. s. p. (p_λ) ヲ選ビ得ルトキ, Aハ $\mathcal{R}$ ニ於テ regularly dense デアルトイフコトニスレバ, 明ニ次ノ定理ガ成立ツ:

定理6. uniform space $\mathcal{R}$ ハ $\mathcal{R}$ ヲ regularly dense ナ部分空間トシテ含ム topologically complete ナ space $\tilde{\mathfrak{R}}$ ニ拡張セラレル。$\tilde{\mathfrak{R}}$ ハ $\mathfrak{R}$ ニヨッテ一意的ニ定マル。

4. 直積. $\mathfrak{R}^\nu$ ヲ夫々 $(\mathfrak{U}^\nu_\sigma(p))$ ヲ近傍系トスル一様位相空間トスル. コノトキ, $\mathfrak{R}^\nu$ カラ夫々任意ニ一ツヅツトッタ点 p^ν ノ組 (p^ν) ヲ一ツノ点ト考ヘ, コノヤウナ点 $p=(p^\nu)$ 全体ヨリ成ル空間ヲ $\mathfrak{R}$ トシ, $\mathfrak{R}$ ニ於テ, 近傍系ヲ

(1) $$\mathfrak{U}^{\nu_1\nu_2\cdots\cdots\nu_l}_{\sigma_1\sigma_2\cdots\cdots\sigma_l}(p)=\left(q;\ q^{\nu_j}\in\mathfrak{U}^{\nu_j}_{\sigma_j}(p^{\nu_j}),\quad 1\leqq j\leqq l\right)$$

ニヨッテ定激サレタ $\left(\mathfrak{U}^{\nu_1\cdots\cdots\nu_l}_{\sigma_1\cdots\cdots\sigma_l}(p)\right)$ ト定義スレバ, $\mathfrak{R}$ モ亦一様位相空間トナル。コレヲ $\mathfrak{R}^\nu$ ノ直積ト名付ケ

(2) $$\mathfrak{R}=\prod_\nu\otimes\mathfrak{R}^\nu$$

デアラハス. $p=(p^\nu)$ ナル $\mathfrak{R}$ ノ点 p ニ對シテ, p^ν ヲ p ノ ν-座標トヨブ。明ラカニ各 $\mathfrak{R}^\nu$ ガスベテ uniform space ナラバ $\mathfrak{R}$ モ uniform space デアル。

定理1. $\mathfrak{R}^\nu$ ガスベテ totally bounded ナラバ $\prod\limits_\nu\otimes\mathfrak{R}^\nu$ モ totally bounded デアル.

証明. $\mathfrak{U}^{\nu_1\nu_2\cdots\cdots\nu_l}_{\sigma_1\sigma_2\cdots\cdots\sigma_l}$ ガ與ヘラレタトキ,

$\mathfrak{R}^{\nu_j}=\sum\limits_{k=1}^{n_j}\mathfrak{U}^{\nu_j}_{\sigma_j}(p^{\nu_j}_k)$ ナル有限個ノ点 $(p^{\nu_j}_1, p^{\nu_j}_2\cdots\cdots p^{\nu_j}_{n_j})$

デアル。$p_{k_1 k_2 \cdots k_l}$ ヲ ν_j 座標ガ $p^{\nu_j}_{k_j}$ ナル点トスル。コノ様ナ点ハ明ラカニ存在スル。容易ニ分ル如ク

$$\mathfrak{R}=\sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2}\cdots\cdots\sum_{k_l=1}^{n_l}\mathfrak{U}^{\nu_1\nu_2\cdots\cdots\nu_l}_{\sigma_1\sigma_2\cdots\cdots\sigma_l}(p_{k_1 k_2\cdots\cdots k_l})$$

故ニ $\mathfrak{R}$ ハ totally bounded デアル。

定理2. complete ナ uniform space $\mathfrak{R}^\nu$ ノ直積 $\prod_\nu \otimes \mathfrak{R}^\nu$ ハ complete デアル。

証明. $p_\lambda=(p^\nu_\lambda)\in \prod_\nu \otimes \mathfrak{R}^\nu$ ガ fundamental ナ d.s.p. ナラバ，各 p^ν_λ ハ $\mathfrak{R}^\nu$ ニ於テ fundamental デアル。故ニ $p^\nu=\lim_\lambda p^\nu_\lambda$ ガ存在スル．$p=(p^\nu)$ トスレバ，明ラカニ $\lim_\lambda p_\lambda=p$. 故ニ $\prod_\nu \otimes \mathfrak{R}^\nu$ ハ complete.

コノ証明ニ於テ totally bounded ナ d.s.p. ノミヲ考ヘルナラバ，直チニ次ノ定理ガ得ラレル。

定理3 topologically complete ナ uniform space ノ直積ハ又 topologically complete デアル。

上ノ定理1，2 ト Nr 3，定理3 カラ直チニ次ノ定理ガ得ラレル：

定理4. bicompact ナ uniform space ノ直積ハ bicompact デアル。[4)]

$\mathfrak{R}^\nu$ ガ夫々 (ρ^ν_k) ヲ距離函数系トスル空間ナルトキ．$p, q \in \prod_\nu \otimes \mathfrak{R}^\nu$ ニ對シテ

---

4) Tychonoff: Ann. 102

(3) $\rho_{\nu\kappa}(p\ \ q) = \rho^{\nu}_{\kappa}(p^{\nu}\ \ q^{\nu})$

トオケバ，$\rho_{\nu\kappa}$ ハ $\prod_{\nu}\otimes\mathfrak{R}^{\nu}$ ニ於ケル距離函數デアッテ $\prod_{\nu}\otimes\mathfrak{R}^{\nu}$ ノ一様位相ハ $\rho_{\nu\kappa}$ ノ全体カラ成ル距離函數系 $(\rho_{\nu\kappa})$ デ與ヘラレル．吾々ハ $(\rho_{\nu\kappa})$ ヲ以テ $\prod_{\nu}\otimes\mathfrak{R}^{\nu}$ ノ距離函數系ト定義スル．

$\mathfrak{R}$ ガ (ρ_{κ}) ヲ距離函數系トスル一般距離空間ナルトキ，$\mathfrak{R}$ ノ $\rho_{\kappa}(p\ \ q) = 0$ ナル二点 p, q ヲ identifizieren シテ得ラレル距離空間ヲ $\mathfrak{R}^{\kappa}$ トシ，$p \in \mathfrak{R}$ ニ對應スル $\mathfrak{R}^{\kappa}$ ノ点ヲ p^{κ} トスル．勿論 $\mathfrak{R}^{\kappa}$ ノ距離函數 ρ^{κ} ハ

(4) $\rho^{\kappa}(p^{\kappa}\ \ q^{\kappa}) = \rho_{\kappa}(p\ \ q)$

デ與ヘラレテヰルト考ヘテヰル。然ルトキハ $p \to (p^{\kappa})$ ナル對應ニヨッテ $\mathfrak{R}$ ハ $\prod_{\kappa}\otimes\mathfrak{R}^{\kappa}$ ノ中ニ isometrisch ニ einbetten サレル．スナハチ

定理5. 一般距離空間ハ距離空間ノ直積ノ部分空間ト考ヘラレル。

從ッテ，$\mathfrak{R}^{\kappa}$ ガスベテ totally bounded ナラバ $\mathfrak{R}$ モ亦 totally bounded デアル．逆ニ，$p \to p^{\kappa}$ ハ一様連続デアルカラ，$\mathfrak{R}$ ガ totally bounded ナラバ，$\mathfrak{R}^{\kappa}$ モ totally bounded デナケレバナラナイ．$\mathfrak{R}^{\kappa}$ ガ totally bounded トイフコトハ，(4) カラ分ル如ク，ρ_{κ} ヲ距離函數トスル空間ト考ヘタトキ，$\mathfrak{R}$ ガ totally bounded ナルコト，スナハチ ρ_{κ} ニ関シテ $\mathfrak{R}$ ガ有限ノ ε- Netz ヲ有スルコトト一致スル。コノ事ハ (ρ_{κ}) ヲ距離函數系トスル一様位相空間ニツイテモ成立

定理6. (ρ_κ)ヲ距離函数系トスル一様位相空間$\mathfrak{R}$ガ *totally bounded* ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ，各ρ_κニ関シテ$\mathfrak{R}$ガ有限ノε-*Netz*ヲ有スルコトデアル。