849. An ergodic theorem of Birkhoff-Khintchine's type II

吉田　耕作（阪大）

前談話（§44）ニハ誤リモアリ[1]，急イデ書イタタメニ色々略シタ所モアリマシタ。又前ヨリモ所々良クナル様デスカラ今一度始カラ述ベテミマセウ。

$\boxed{\text{定理}}$ Banach 空間 (L^p) ノ (L^p) ヘノ線型寫像 T ガ[2]

(1) $\|T^n\| \leqq$ 常數 C $(n=1,2,\cdots\cdots)$

(2) 全テノ $f\in(L^p)$ ニ對シ，殆ンド到ル所

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^{(m)}(t)\right| < \infty,$$

但シ $f^{(n)} = T^n\cdot f$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$，ヲ滿足スルトスル。

コノトキ若シ或ル $g\in(L^p)$ ガ

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,g^{(n)}(t)=0$

almost everywhere.

---

1) $\boxed{\text{定理}}$ ニ於テ必充條件トシタノハ充分條件ノ誤リデス。從ッテ $\boxed{\text{証明}}$ ノ初ノ必要ハ明カデアルカラハ餘計デシタ。

2) $f(t)\in(L^p)$ ノ norm ハ $\|f\|=\left(\int_0^1|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ デ定義サレル。

(4) $\left\{\begin{array}{l}\left\{\dfrac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)}\right\}\text{ が }(\mathrm{L}^p)\text{ ノ点 } g^* \text{ ニ弱収斂ス}\\ \text{ル部分列ヲ含ム.}\end{array}\right.$

ヲ満足スルトラバ

$$\text{(5)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)}(t)=g^*(t)$$

almost everywhere

$$\text{(6)}\quad \lim_{n\to\infty}\left\| g^* - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)}\right\| = 0$$

注意　全テノ $f\in(\mathrm{L}^p)$ ニ對シテ $\left\|\dfrac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^{(m)}\right\| \leqq C\cdot\|f\|$

$(n=1,2,\cdots\cdots)$

が (1) カラ出シカラ，$p=1$ ノトキハ (4) ハ $\left\{\dfrac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)}\right\}$ が

equi-integrable ナ部分列ヲ含ムコトト同等デアル。

又 $p>1$ ナラバ (4) ハ餘計ナ假定デアル。何若 (L^p) ハ $p>1$

ナルトキ locally weakly compact ダカラ

定理 2　T が (1), (2) ノ他ニ

$$\text{(1)}'\quad \|T^n\|_M \leqq \text{常數 } C' \qquad (n=1,2,\cdots\cdots)^{1)}$$

ヲ満足スルナラバ，全テノ $g\in(\mathrm{L}^p)$ ニ對シ (3), (4), (5), (6)

が全テ成立スル。

定理 3　若シモ

脚註1) 次頁へ

(7) 各 $g \in (L^p)$ ニ對シ $|g^{(m)}(t)| \leqq G(t)$ $(m=1,2,\dots\dots)$ ナル如キ $G \in (L^p)$ 存在ス。

ヲ假定スレバ，全テノ $g \in (L^p)$ ニ對シ (3), (4), (5), (6) ガ成立ツ。 證明ノ爲ニ次ノ *Lemma* ガ必要ニナル

$\boxed{\textit{Lemma}}$ T ガ (2) ヲ滿足スルトスル。若シ各 $f \in (L^p)$ ニ對シ

$$\tilde{f}(t) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^{(m)}(t) - \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^{(m)}(t)$$

ヲ定義スルトキ (L^p) カラ *type* (F) ノ空間 (S)[2] ヘノ寫像（必ズシモ線型カドウカワカラヌ）$\tilde{T}: \tilde{f} = \tilde{T}\cdot f$ ハ連續デアル。即チ $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ カラ $\lim_{n\to\infty}\|\tilde{T}\cdot f_n - \tilde{T}\cdot f\|_S = 0$ ヲ得ル。

$\boxed{\text{證明}}$ コノ *Lemma* ハ *Banach-Saks* ノ定理トシテ知ラレテヰルモノノ特別ナ場合デアル。併シ *Banach* ノ書物等ニハ載ッテ居ナイヤウデアルシ，本談話ノ方法ノ

前頁脚註

1) (M) ハ *essentially bounded* ナ *measurable function* ノ作ル *Banach* 空間。(M) デノ *norm* ハ $\|f\|_M = \text{essential}\sup_t |f(t)|$。從ッテ $(1)'$ ハ特ニ T ガ (M) ヲ (M) ヘノ線型寫像ニナッテヰルコトヲ要求シテヰル譯デアル。

2) 殆ド到ル所有限ナ可測函數ノ作ル空間。(S) デノ *norm* ハ $\|f\|_S = \int_0^1 \frac{|f(t)|}{1+|f(t)|}dt$ デ定義サレル。*norm* $\|\ \|_S$ デノ收斂ハ漸近收斂ト同値デアル。

key デアルカラ S. Mazur ト W. Orlicz[1] ニ従ッテ proof sketch ヲ書イテオキマス。

$$f_n = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f^{(m)}.\quad f'_n(t) = \sup_{m \leqq n} |f_m(t)|,$$

$f'(t) = \sup_m |f_m(t)|$ ト置キ (L^p) カラ (S) ヘノ寫像 $\nabla_n \cdot f = f'_n$, $\nabla \cdot f = f'$ ヲ考ヘル。各 ∇_n ハ連續且ツ全テノ点 $f \in (\mathrm{L}^p)$ ニ於テ $\lim_{n\to\infty} \| \nabla_n \cdot f - \nabla \cdot f \|_S = 0.$

従ッテ $\lim_{n\to\infty} \| \frac{1}{k} \nabla_n \cdot f \|_S = \| \frac{1}{k} \nabla \cdot f \|_S$ $(k = 1, 2, \cdots\cdots)$ ト $\lim_{k\to\infty} \| \frac{1}{k} \nabla \cdot f \|_S = 0$ ニヨリ $(\mathrm{L}^p) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k$,

$G_k = \mathop{E}_f (\| \frac{1}{k} \nabla_n \cdot f \|_S \leqq \varepsilon;\ n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ト全テノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ分解サレル。∇_n ノ連續性カラ各 G_k ハ (L^p) ノ閉集合。然シテ (L^p) ハ完備距離空間ダカラ、或ル G_k ハ球ヲ含マネバナラナイ。即チアル点 $f_0 \in (\mathrm{L}^p)$ ト $\delta > 0$ が存在シテ $\sup_n \| \frac{1}{k} \nabla_n \cdot f \|_S \leqq \varepsilon$ for $\| f - f_0 \| \leqq \delta$ トナラネバナラナイ。所が

$$\| \frac{1}{k} \nabla_n \cdot (f - f_0) \|_S \leqq \| \frac{1}{k} \nabla_n \cdot f \|_S + \| \frac{1}{k} \nabla_n \cdot f_0 \|_S,$$

$\| \nabla_n \cdot (\frac{1}{k} f) \|_S = \| \frac{1}{k} \nabla_n \cdot f \|_S$ ダカラ n ニ對シ一様ニ $\lim_{\|f\|\to 0} \| \nabla_n \cdot f \|_S = 0$. 故ニ $\nabla_n \cdot f$ ハ $f = 0$ デ連續且ツ $\nabla \cdot 0 = 0$. 然シテ $\| \tilde{T} \cdot f \|_S \leqq 2 \| \nabla \cdot f \|_S$,

$\left| \| \tilde{T} \cdot f \|_S - \| \tilde{T} \cdot h \|_S \right| \leqq \| \tilde{T} \cdot (f - h) \|_S$ ダカラ $\tilde{T} \cdot f$ ハ

各 $f\in(L^p)$ デ連續デアル。 以上

$\boxed{\text{定理1ノ証}}$ (1) ト (4) トニヨリ g ニ對シテ mean ergodic theorem (6) が使ヘル. 故ニ

$\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g^{(m)}\right\}$ ハ g^* ニ<u>強收斂</u>シ $g^*=T\cdot g^*$,

$g=g^*+(g-g^*)$ ト置クナラバ, $g^{(m)}=g^{(*)}+(g-g^*)^{(m)}$.

$\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(g-g^*)^{(m)}\right\}$ が 0 ニ強收斂スルノダカラ, (5) ヲ云フニハ

$$(8)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(g-g^*)^{(m)}$$

が almost everywhere ニ存在スルコトヲ云ヘバヨイ。 所が $\left\{\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}g^{(m)}\right\}$ ノ g^* ヘノ強收斂カラ

$$(9)\quad \lim_{m\to\infty}\left\|(g-g^*)-(E-T)\cdot\frac{mg+(m-1)g^{(1)}+\cdots+g^{(m-1)}}{m}\right\|=0$$ [1]

(3) ニヨリ

$$(10)\quad \tilde{T}\cdot\left\{(E-T)\frac{mg+(m-1)g^{(1)}+\cdots\cdots+g^{(m-1)}}{m}\right\}=0$$

$$(m=1,2,\cdots\cdots)$$

ダカラ, (9), (10) ト Lemma ニヨリ $\tilde{T}\cdot(g-g^*)=0$ 即チ (8) が得ラレタ。

$\boxed{\text{定理2ノ証}}$ $(1)'$ ニヨリ (3), (4) が全テノ $g\in(L^p)\cdot(M)$ ニ對シテ成リ立ツ。從ツテ定理1ニヨリ (5) が全テノ $g\in(L^p)\cdot(M)$ ニ対シテ成立ツ。所が (M) ハ norm $\|\ \ \|$ ノ意味デ (L^p)

---

1) E ハ單位寫像

dense ダカラ Lemma ニヨリ，(5) ガ全テ $g\in(\mathrm{L}^p)$ ニ對シテ成立ツ，mean ergodic theorem (6) ノ方ハ (4) ガ $g\in(\mathrm{L}^p)\cdot(\mathrm{M})$ ニ對シテ成立ツコトト，(M) ガ (L^p) デ dense ナコトカラ出ル。

$\boxed{\text{定理3ノ證}}$ (9) ニヨリ (1) ノ滿足サレテルコトガワカル (Banach ノ定理!). 又 (9) ニヨリ (2), (3), (4) モ全テノ $g\in(\mathrm{L}^p)$ ニ對シテ滿足サレテルカラ，定理1ニヨリ，定理3ヲ得ル. 證了。

| Birkhoff-Khintchine ノ定理ヲ定理2ヨリ導クコト |

P ヲ (0, 1) ノ (0, 1) ヘノ one-to-one[1] 且ツ equimeasure 点変換トセヨ。$f\in(\mathrm{L}^p)$ ニ對シ $f^{(1)}$, $f^{(1)}(t)=f(P\cdot t)$ ヲ對應サセル線型寫像 T ヲ考ヘル。T ガ (1), (1'), (4) ヲ滿足シテヰルコトハ明カデアル。又 N. Wiener[2] ニヨレバ non-negative ナ函数 $f(t)\in(\mathrm{L}^p)$ ニ對シ

$$
(10)\quad \begin{cases} \operatorname{mes}\left(\underset{t}{\mathrm{E}}\left(\overline{f(t)}>\alpha\right)\right) \leqq \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt, \\[2ex] \overline{f}(t)=\sup\limits_{n}\left\{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{m=1}^{n} f^{(m)}(t)\right\}, \\[2ex] \alpha>0 \text{ ナル任意常數.} \end{cases}
$$

故ニ (2) モ亦滿足サレテル. 故ニ定理2ニヨリ全テノ

---

1) measure 0 ヲ除イテ one-to-one

2) Duke Math. J. 5 (1939), 1-18.

$f \in (L^p)$ ニ對シ (3), (5), (6) ガ成立ツ。之レデ B−K ergodic theorem ガ得ラレヌ。

$\boxed{\text{注意}}$ 角谷氏ニヨレバ, equi-measure 点変換ノ場合ハ次ノ如クシテ、non-negative ナ $f \in (L^p)$ ニ対シ (3) ノ成立ツコトガ云ヘル。從ツテ定理1ヨリモ直接 B−K ergodic theorem ガ得ラレル。

$$E^{n}_{m}(\alpha) = \underset{t}{E}\left(m\alpha \leqq g^{(n)}(t) < (m+1)\alpha\right), \ (n=1,2,$$

$\cdots\cdots$) トラシバ

$$E_{k,l;m}(\alpha) = \underset{t}{E}\left(\alpha \leqq \frac{g^{(n)}(\alpha)}{n} < (m+1)\alpha;\ n=k,\right.$$

$$\left.k+1,\cdots\cdots, l\right) \leqq \sum_{n=k}^{l}\sum_{i=n}^{nm} E^{(n)}_{i}(\alpha).$$

P ガ equi-measure ダカラ $mes(E^{n}_{i}(\alpha))$ ハ n ニ無関係，ヨツテ

$$mes\left(E_{k,l;m}(\alpha)\right) \leqq \sum_{n=k}^{l}\sum_{i=n}^{nm} mes\left(E^{1}_{i}(\alpha)\right)$$

$$\leqq \sum_{j=k}^{\infty} j\, mes\left(E^{1}_{j}(\alpha)\right) \leqq \frac{1}{\alpha}\int_{g^{(1)}(t) \geqq k\alpha} g^{(1)}(t)\,dt$$

ヲ得ル．故ニ $\lim_{k\to\infty}\left(\underset{t}{E}\left(\left(\sup_{n \geqq k}\frac{g^{(n)}(t)}{n}\right) \geqq \alpha\right)\right) = 0$ 即チ (3) ハ証明サレタ。

前諸節ニ述ベタ如ク Wiener ハ (10) ト mean ergodic theorem カラ B−K ergodic theorem

ヲ証明シタ。我々ノ方法ハ，之ノ equi-measure デナイ場合ヲモ含ムヤウナ，operator-theoretical extension ト云ヘルデアリマセウ。大体 almost everywhere ナ収斂ヲ問題トシテルノデスカラ operator $\widetilde{T}$ ヲ考ヘルノガ自然ナノデハアリマスマイカ。