847. Compact 群上ノ Markoff Process.

河田　敬義（東　大）
伊藤　　清（内閣統計局）

Stationary distribution ヲモツ Markoff process ノ特別ノ場合トシテ separbel compact group G ノ上ノ Markoff process ヲ考ヘルコトガ出来ル。即チ G 上ノ Borel set E ニ対スル completely additive, non negative ナ set function $p(E)$（特ニ $p(G)=1$）カラ、単位時間後ニ x ガ E 内ニ移ル確率 $P(x, E)$ ガ

$$(1)\quad P(x, E) = p(x^{-1}E), \quad \text{特ニ } P(1, E) = p(E)$$

ニ依ッテ與ヘラレル場合デアル。

此レガ G ノ invariant measure $m_G(E)$, ($m_G(G)=1$) ヲ stable distribution トシテ持ツコトハ

$$(1')\quad \varphi(E) = \int_G m_G(dx)\,P(x, E) = \int m_G(dx)\,p(x^{-1}E)$$

$$= \int m_G(dx)\,p((ax)^{-1}aE)$$

$$= \int m_G(d(ax))\,P(ax, aE) = \varphi(aE)$$

カラ $\varphi(E)$ モ invariant measure トナリ Haar measure ノ一義性ト $\varphi(G)=1$ ヨリ $\varphi(E) = m_G(E)$ ト

ナルコトカラワカル。[1)]

$p(E)=p^{(1)}(E)$ トオキ

(2) $$p^{(n)}(E)=\int_G p^{(n-1)}(y^{-1}E)\,P^{(1)}(dy)$$

トスレバ

$$P^{(n)}(x,E)=\int_G P^{(n-1)}(x,dy)\,P^{(1)}(y,E)=p^{(n)}(x^{-1}E)$$

トナル。故ニ $p^{(n)}(E)$。$n\to\infty$ サヘ調べレバ充分デアル。

点 x ガ *probability function* $P(E)$ ノ *Spectrum* ニ属スルトハ任意ノ x ヲ含ム *open set* E ニ對シテ $p(E)>0$ ヲ意味スルトスレバ、p ノ *Spectrum* ハ G ノ *closed subset* S ニナル。H ヲ S デ *generate* サレル *closed subgroup* トスレバ、

アル *closed subgroup* H_0 ニ對シテ

(3) $$p(E)=0 \quad for \quad E\cap H_0=0$$

ナラバ $H\subseteq H_0$ トナル。H ハカヽル H_0 ノ最小ナモノデアル。

特ニ $H=G$ ノトキニ *probability function* $p(E)$ "*proper in G*" ト呼ブコトニスル。

$$p^{(2)}(E)=\int_G p(x^{-1}E)\,p(dx)=\int_H p(x^{-1}E)\,p(dx)$$

$$=\int_H p(x^{-1}\cdot E\cap H)\,p(dx)=p^{(2)}(E\cap H)$$

---

1) 之ノ方法ハ小平氏ト伊藤氏ニ教ヘテイタヾキマシタ。

ナル故 $E \frown H = 0$ ナラ $p^{(2)}(E)=0$ トナル。一般ニ

$$(4)\quad \begin{cases} p^{(n)}(E)=0 & \text{for } E\frown H=0 \\ p^{(n)}(E)=\displaystyle\int_H p^{(n-1)}(x^{-1}E)\,p(dx) & \text{for } E\subseteq H. \end{cases}$$

トナルカラ問題ハ全ク H ノ中ニ制限サレル。然ルニコノ probability function ヲ H ノミデ考ヘレバ proper トナルカラ <u>今後 proper in G ナ場合ノミヲ考ヘルコトニスル</u>。

$p^{(n)}(E)$ ハ一般ニハ $n\longrightarrow\infty$ ニ對シテ收斂シナイコトハ次ノ例デヨイ。即チ G ヲ円周（周長ヲ 1 トスル）ノ廻轉群トシ ω ヲ無理數トスル時

$$\begin{cases} p(E)=1, & E\ni\omega \\ p(E)=0, & E\not\ni\omega \end{cases}$$

デ定義スレバ

$$p^{(n)}(E)=\begin{cases} 1, & E\ni n\omega \ (\mathrm{mod.}\ 1) \\ 0, & E\not\ni n\omega \ (\mathrm{mod.}\ 1) \end{cases}$$

トナルカラ $p^{(n)}(E)$ ハ $n\longrightarrow\infty$ ノトキニ收斂シナイ。然シ此ノ時モ Weyl ノ一樣分布ノ理論カラ interval I ニ對シテハ

$$(5)\quad \frac{1}{n}\left(p^{(1)}(I)+p^{(2)}(I)+\cdots\cdots+p^{(n)}(I)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} m_G(I)$$

トナルコトガヨク知ラレテヰル。(5) ハ一般ノ Borel set E ニ対シテハ必ズシモ成立シナイコトハ E トシテ G カラ $n\omega$ (mod. 1) ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) ヲ除イタ残りヲ考ヘテミ

レバ $\frac{1}{n}(p^{(1)}(E)+\cdots\cdots+p^{(n)}(E))=0$ デアルカラ (5) ハ明カニ成立シナイ。此ノコトハ一般ノ G デ continuous set トイフ名デ区別サレル。即チ E ガ m_G ニ対シテ continuous set デアルトハ E ノ closure ヲ $\bar{E}$, E ノ内点全体ヲ E° トスルトキ $m_G(E)=m_G(\bar{E})=m_G(E^{\circ})$ ナルコトヲイフ。ソウスレバ (5) ハ continuous set ニ對シテハ成立スルコトガヨク知ラレテヰル。一般ニ $p(E)$ ガカヽル特別ナ場合ヲ除イテハ実際ニ $p^{(n)}(E)$ 自身ガ $n\to\infty$ ノ時ニ收斂スル。

定理 I. $p(E)$ ハ proper in G トスルト

(I) m_G ノ continuous set E ニ対シテ常ニ

(6) $$\frac{1}{n}\left(p^{(1)}(E)+\cdots\cdots+p^{(n)}(E)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} m_G(E)$$

ガ成立スル。

(II) 若シモ $p(E)$ ノ Spectrum S ガ G ノ closed invariant subgroup H ノ一ツノ Nebenclass $s_0H\,(=Hs_0)$ ニ含マレルナラバ:

(ｲ) $S\subseteq s_0H$, $s_0\notin H$,

G/H ハ abelien トナリ、$\{s_0H\}$ デ s_0H デ generate サレル subgroup ヲ表ハセバ

$$G=\{s_0H\}$$

トナリ $E'\subset H$ ヲ H ノ invariant measure m_H ニ関スル continuous set トスレバ

(ｲ') $$p^{(n)}(s_0^{\,n}E')\xrightarrow[n\to\infty]{} m_H(E')$$

トナル。故ニ $p^{(n)}(E)$ ハ勿論一般ニ $n \to \infty$ ノトキニ收斂シナイ。

(III) 若シモ $p(E)$ ノ Spectrum S ニ對シテ (7) ヲ滿足スルヤウナ H_{S_0} ガ存在シナイナラバ (6) ヨリモ強イ

(8) $$p^{(n)}(E) \xrightarrow[n\to\infty]{} m_G(E)$$

ガスベテノ m_G - continuous set E ニ對シテ成立スル。

(7), (8) ハヨク知ラレテヰルヤウニ次ノ (7°), (8°) ト等シイ値デアル:

スベテノ連續函數 $f(x)$ ニ対シテ

(7°) $$\frac{1}{n}\left(\int_G f(x)\,p^{(1)}(dx)+\cdots\cdots+\int_G f(x)\,p^{(n)}(dx)\right) \longrightarrow \int_G f(x)\, m_G(dx)$$

(8°) $$\int_G f(x)\,p^{(n)}(dx) \longrightarrow \int_G f(x)\, m_G(dx).$$

定理ノ証明ニハ、實數全体ノ上ニ分布スル確率変數ノ characteristic function ノ考ヘヲ変形シタ characteristic matrices ヲ用フル。

G ノ inequivalent ナ可附番箇ノ continuous unitary irreducible representations ヲ

$$G \ni s \longrightarrow D^{(r)}(s) = \left(d_{ij}^{(r)}(s)\right);\ (r=0,1,2,\cdots\cdots)$$

トスルトキ G ノ Borel sets $\{E\}$ ノ上ノ completely additive ナ set function $p(E)$ ノ characteristic matrices $D_0^{(r)}(p)$ $(r=0,1,2,\cdots\cdots)$ トハ

$$(9)\quad D_0^{(r)}(p)=\left(\int_G d_{ij}^{(r)}(s)\,p(ds)\right)$$

ノコトヽスル。characteristic function ノ時ノ Lèvy ノ定理ニ對應シテ

<u>Lemma I.</u> 『$p^{(n)}(E)$ ナル completely additive set function ニ於テ

(i) $\lim_{n\to\infty} p^{(n)}(E)=p^{(0)}(E)$ for all $p^{(0)}$-continuous set E

(ii) $\lim_{n\to\infty}\int_G f(s)\,p^{(n)}(dS)=\int_G f(s)\,p^{(0)}(dS)$

for all continuous function $f(s)$

(iii) $\lim_{n\to\infty} D_0^{(r)}(p^{(n)})=D_0^{(r)}(p^{(0)})$, $r=0,1,2,\cdots\cdots$

ハ互ニ等値デアル。』

(i) ト (ii) トノ等値ハ既ニ述ベタ様ニ良ク知ラレテヰル事實デアル。

(ii) カラ (iii) ノ出ルコトハ $d_{ij}^{(r)}(s)$ ハ S ノ continuous function デアルカラ明カデアル。逆ニ (iii) カラ (ii) ノ出ルコトハ任意ニ與ヘラレタ $f(x)$ ト ε ニ對シテ先ヅ J. Neumann ノ almost periodic function ノ approximation theorem カラ

$$(10)\quad \left|f(x)-\sum \alpha_{ij}^{(r)}\,d_{ij}^{(r)}(x)\right|<\frac{\varepsilon}{4},\quad x\in G$$

ヲ満足スルヤウニ有限箇ノ $d_{ij}^{(r)}(x)$ ガ存在スル。故ニ

$$\left|\int_G f(x)\,p^{(n)}(dx)-\sum \alpha_{ij}^{(r)}\int_G d_{ij}^{(r)}(x)\,p^{(n)}(dx)\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

一方 $\sum\left|\alpha_{ij}^{(r)}\right|=C$ ニ対シテ (iii) カラ (10) ニアラハレル (r) ニ對シテ

$$\left|\int_G d_{ij}^{(r)}(x)\,p^{(n)}(dx)-\int_G d_{ij}^{(r)}(x)\,p^{(0)}(dx)\right|<\frac{\varepsilon}{2C}$$

$$\text{for}\quad n>n_0$$

ト n_0 ガキマルカラ、之等ヲ合セテ

$$\left|\int_G f(x)\,p^{(n)}(dx)-\int_G f(x)\,p^{(0)}(dx)\right|<\varepsilon,\ n>n_0$$

即チ (ii) ガ成立スル。

Lemma 2. 『

(11) $\quad D_0^{(r)}(p^{(n)})=\left(D_0^{(r)}(p)\right)^n$ 』 $(r=0,1,2,\cdots)$

(証) $D^{(r)}(s)$ ハ G ノ *representation* ナル故

$D^{(r)}(s_1\cdots\cdots s_n)=D^{(r)}(s_1)\cdots\cdots D^{(r)}(s_n)$ トナルカラ

$$D_0^{(r)}(p^{(n)})=\int_G D^{(r)}(s)\,p^{(n)}(ds)$$

$$=\int_G\cdots\cdots\int_G D^{(r)}(s_1\cdots\cdots s_n)\,p(ds_1)\cdots p(ds_n)$$

$$=\int_G D^{(r)}(s_1)\,p(ds_1)\cdots\cdots\int_G D^{(r)}(s_n)\,p(ds_n)$$

$$=\left(D_0^{(r)}(p)\right)^n$$

トナル。

今後 $D^{(0)}(s)$ ヲ G ノ identy representation トスルト，一般ニ

$$D_0^{(0)}(p)=1$$

トナル。特ニ invariant measure m_G ニ對シテハ $r \neq D$ ナラ $\int_G d_{ij}^{(r)}(s)\, m_G(ds)=0$ カラ

$$(12) \quad D_0^{(r)}(m_G)=0 \qquad (r=1,2,\text{-----})$$

ガ成立スル。故ニ例ヘバ (8) 式ヲ証明スルニハ Lemma 1, 2ヨリ

$$(13) \quad \left(D^{(r)}(p)\right)^n \longrightarrow 0 \qquad (r=1,2,\text{-----})$$

ヲ言ヒサヘスレバヨイコトニナル。ソレニハ又 $D^{(r)}(p)$ ノスベテノ Eigenvalue ノ絶對値ガ 1 ヨリ小デアリサヘスレバヨイ。

今 $\omega^{(r)}$ ヲ $D^{(r)}(p)$ ノ一ツノ Eigenvalue トシ、其レニ対スル長サ 1 ナル Eigenvector ヲ $\eta^{(1)}$ トスル:

$$D^{(r)}(p)\,\eta^{(1)} = \omega^{(r)}\eta^{(1)}.$$

今 $\xi^{(i)}=(0,\text{----}0,1,0,\text{----},0)$（1ハ i 番目）$(i=1\text{---}n)$ ニ対シテ unitary transformation U_r ヲトリ

$$U\xi^{(1)}=\eta^{(1)}$$

ニ擇ブ。シカルトキハ

$$\overline{D}_0^{(r)}(p)=U_r^{-1}D_0^{(r)}(p)\,U_r \text{ ハ}$$

$$\left(\overline{d}_{ij}^{(r)}(s)\right)=\overline{D}^{(r)}(s)=U_r^{-1}D^{(r)}(s)\,U_r$$

ナル既約表現ニ對スル characteristic matrix トナリ

$$\overline{D}_0^{(r)}(p)\,\eta^{(1)} = \omega^{(r)}\,\eta^{(1)}$$ トナル。即チ

$$\overline{D}_0^{(r)}(p) = \begin{pmatrix} \nu^{(r)} & \\ 0 & * \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

ノ形トナル。故ニ

$$(14)\quad \omega = \int_G \overline{d}_{11}^{(r)}(s)\,p(ds)$$

トナル。$\overline{D}^{(r)'}(s)$ モ unitary matrix ナル故

$|\overline{d}_{11}^{(r)}(s)| \leqq 1.$

$$\therefore\quad |\omega^{(r)}| \leqq 1$$

(イ) (3) ナル H_0 ガ存在シナイト假定スレバ

$$\omega^{(r)} \neq 1$$

トナル。何トナレバ $\omega^{(r)} = 1$ ナラバ $\overline{d}_{11}^{(r)}(s) = 1$ ナル s ノ全体ヲ H トスレバ $\sum_i |\overline{d}_{1i}^{(r)}(s)|^2 = \sum |\overline{d}_{i1}^{(r)}(s)|^2 = 1$ カラ $\overline{d}_{1i}^{(r)}(s) = \overline{d}_{i1}^{(r)}(s) = 0\ (i \neq 1)$ トナリ H ハ G ノ closed subgroup トナル。然ルニ (14) カラ

$$H \frown E = 0 \text{ ナラバ } p(E) = 0$$

トナリ假定ニ反スル。

(ロ) 又 (イ) ナル H ガナイト假定スレバ

$$|\omega^{(r)}| < 1$$

トナル。何トナレバ $\omega^{(r)}=e^{i\lambda}$ トスレバ $\overline{d}_{11}^{(r)}(s)=e^{i\lambda}$ トナル全体ヲ F トスレバ (14) カラ

$$F \frown E = 0 \text{ ナラバ } p(E)=0$$

トナル。(イ) ト同様ニ

$$F \ni s \text{ ナラ } \overline{D}^{(r)}(s)=\begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

ノ形トナリ、$F \ni s_0$ ヲ任意ニ一ツトレバ

$$\overline{D}^{(r)}(s s_0^{-1})=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

ノ形トナル。H ヲ $\overline{d}_{11}^{(r)}(s)=1$ ノ s ノ全体ノナス closed subgroup トスレバ

$$F \subset s_0 H = H s_0$$

トナリ、(ワ) ノ假定ニ反スル。

(ハ) 一般ノ場合ニハ $D_0^{(r)}(p)$ ノ絶對値 1 ノ Eigen-value ヲ（重複度ダケ数ヘテ）$e^{i\lambda_1^{(r)}}, \cdots\cdots, e^{i\lambda_{m_r}^{(r)}}$ ($\lambda_j^{(r)} \neq 0 \pmod{2\pi}$) トスレバ適當ナ unitary matrix U_r ニ対シテ (イ), (ロ) ト全様ニ

$$(15) \quad U_r^{-1} D_0^{(r)}(p) U = \overline{D}_0^{(r)}(p) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda_1^{(r)}} & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & e^{i\lambda_{m_r}^{(r)}} & \\ 0 & & & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

トナリ

$$\overline{d}^{(r)}_{jj}(s) = e^{i\lambda_j^{(r)}} \qquad (j=1,\cdots\cdots,m_r)$$

トナル$s\in G$ノ全体ヲFトスレバ

$$F\frown E = 0 \quad ナラ \quad p(E)=0$$

トナル。且ツ $\boxed{*}$ ノ部分ノEigenvalueノ絶対値ハスベテ1ヨリ小サイ。

$$\overline{D}^{(r)}(s) = U_r^{-1}D^{(r)}(s)U_r = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad \cdots \quad 1}^{m_r} & 0 \\ 0 & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

トナルSノ全体ヲHトスレバ、HハGノclosed subgroupトナリ，$s_0\in F$ヲ任意ニ一ツ取レバ

$$F = s_0H = Hs_0$$

トナル。今$\overline{\{s_0H\}} = G_1$トスレバ$E\frown G_1=0$ナラ$p(E)=0$ナル故假定カラ$G_1 = G$トナリ，HハGノinvariant subgroupトナル。

$$(16)\quad \frac{1}{n}\left(D^{(r)}_0(p^{(1)})+\cdots+D^{(r)}_0(p^{(n)})\right) = \begin{pmatrix} \alpha^{(r)}_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \alpha^{(r)}_{m_r} & \\ 0 & & & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

$$\alpha^{(r)}_j = \frac{1}{n}\left(e^{i\lambda_j^{(r)}}+\cdots\cdots+e^{in\lambda_j^{(r)}}\right) \qquad (j=1,\cdots\cdots,m_r)$$

ナル故$n\to\infty$トスレバ(16)ノMatrix$\to 0\ (r=1,2,\cdots\cdots)$トナル。故ニLemma 1カラ(6)ハ此ノ場合ニモ成立スル。

最後ニ此ノ場合ニ(η′)ヲ証明スル。

$$p'(E) = p(s_0 E)$$

トスレバ

$$D_0^{(r)}(p') = \int D^{(r)}(s)\, p'(ds) = \int D^{(r)}(s_0)^{-1} D^{(r)}(s_0 s)\, p(s_0 ds)$$

$$= D^{(r)}(s_0)^{-1} D_0^{(r)}(p)$$

トナル。故ニ(η′)デハ $D^{(r)}(s_0)^{-n} D_0^{(r)}(p)^n$ ノ $n \to \infty$ 時ノ収斂ガ問題トナル。$D^{(r)}(s_0)^{-n}$ ハ unitary matrix ナル故 (15) カラ

$$\overline{D}^{(r)}(s_0)^{-n}\, \overline{D}_0^{(r)}(p)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{m_r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ナレコトガ容易ニワカル。一方之ノ右辺ガ m_H ノ characteristic matrix ナルコトヲ認メルタメニハ H ノスベテノ continuous unitary irreducible representations ハ G ノ $D^{(r)}(s)$ $(r = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ ヲ H ノ representation トシテ既約部分ニ分解スルコトニヨッテ得ラレルコトニ注意スレバヨイ。[2] コレデ定理ノ証明ハ完結シタ。

---

2) コノ基本的事実ノ証明ハ例ヘバ van Kampen: Almost periodic functions and compact groups (Annals of Math. 37) ノ Modul ナル考ヘヲ使ヘバスグ出来ル。

H ノ既約表現デ G ノソレヲ分解シテ得ラレル全体ハ (次頁ヘ続ク)

(8)ガスベテノ Borel set ニ對シテ成立スルタメノ充分條件トシテハ

定理 2. E ニ無関係ナ正数 α ガアッテ

$$p(E) \geqq \alpha\, m_G(E)$$

ガ成立スルナラバ、スベテノ Borel set ニ對シテ

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)}(E) = m_G(E).$$

証明ハ

T. Uno et Y. Hasimoto: Sur le Problème du Battage des Cartes. 數物記事 17, (1935) ヲ眞似ルト出來ル。

$$(17) \quad p(E) = m_G(E) + p'(E)$$

ト置ケバ

$$(18) \quad \int p'(s^{-1}E)\, m_G(ds) = \int m_G(s^{-1}E)\, p'(ds) = 0$$

トナルコトガ (1') ト同樣ニ Haar measure ノ uniqueness ト $p'(G) = 0$ トカラワカル。故ニ $p'^{(n)}(E) = \int_G p'^{(n-1)}(s^{-1}E)\, p'(ds)$ トスレバ (17) ヨリ

$$(19) \quad p^{(n)}(E) = m_G(E) + p'^{(n)}(E)$$

Modul Γ ヲナス。然ルニ Γ 全体ヲ取レバ H ノ faithful representation トナルカラ Γ ハ H ノスベテノ連続既約表現ヲ含ム。(第182号, 談話 797, p. 330. [C"] 參照)

トナル。更ニ

$$(20)\quad p'(E) = q(E) - \beta\, m_G(E), \qquad (\beta = 1-\alpha)$$

トオケバ定理ノ條件カラ

$$q(E) \geqq 0, \qquad q(G) = \beta$$

トナリ

$$\int_G q(S^{-1}E)\, m_G(dS) = \int_G m_G(S^{-1}E)\, q(dS') = \beta^2$$

ガ(18)ト同様ニワカル。故ニ(20)カラ

$$p'^{(n)}(E) = q^{(n)}(E) - \beta^n m_G(E)$$

トナリ(19)ト合セテ $q^{(n)}(E) \geqq 0$ カラ

$$p^{(n)}(E) = (1-\beta^n)\, m_G(E) + q^{(n)}(E) \geqq (1-\beta^n)\, m_G(E)$$

トナル。一方

$$p^{(n)}(E) = 1 - p^{(n)}(G-E) \leqq 1-(1-\beta^n)\, m_G(G-E)$$

$$= 1-(1-\beta^n)(1-m_G(E)) = (1-(1-\beta)^n) + (1-\beta^n)\, m_G(E)$$

トナルカラ両者合セテ

$$p^{(n)}(E) \longrightarrow m_G(E)$$

トナルコトガワカル。