840. Strong law of numbers ニ就テ

河 田　龍 夫（東北大）

1. $X_1, X_2, \cdots\cdots X_n \cdots\cdots$ ヲ互ニ独立ナ chance variables ノ sequence トスル。expectation $E(X_n)=0$ トスル。

$$(1)\quad \frac{S_n}{n}=\frac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}$$

ノ zero ニ收斂スル probability ガ 1 ナルトキ考ヘル sequence ハ strong law of large numbers (s. l. l. n) ニ從フト云ハレル。通常ノ law of large numbers ト云フノハ S_n/n ガ 0 ニ convergent in prob. ナルコトデアル。

$\{X_n\}$ ガ s. l. l. n ニ從フタメノ充分條件ハ Kolmogoroff, (Compt. Rendus 191 (1930)), Marcinkiewicz-Zygmund (Fund. Math. 27), Halmos

(Annals. Math. 40 (1939)). Birnbaum-schreier (Studia Math. 3) 等デ與ヘラレテキル。

サテ Chance variables ノ series $\sum x_i$ ニ就テハソノ convergence in prob. ト almost surely conv. (conv. スル prob. が 1) トハ同等デアル、トハヨク知ラレタ Lévy ノ定理デアル。併シ (1) ノ 0 ヘノ conv. ニ就イテハソノ conv. in prob. ト alm. sure conv. トハ必ズシモ一致シナイ。從ッテコノ場合 conv. in prob. カラ alm. sure conv. が出テクルノニハドンナコトが要ルカトイフコトヲ考ヘテ見タイ。延イテハソレカラ (1) が s. l. l. n ニ從フタメノ既知ノ充分條件が得ラレレバ面白イワケデス。

上ノ Lévy ノ定理ハ G. Ottaviani ニヨッテ極メテ簡單ナ証明が與ヘラレタ。(吉田耕作氏ノ紹介が全.紙.談. ノ 188 号ニアル). ソレト全ク同ジ論理ヲ辿ッテ吾々ノ目的ヲ達スルコトが出來ル事ヲ述ベテ見マス。

2. prob. ヲ Lebesgue measure ノ言葉デヤッテ見マス。

$$x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots$$

ヲ independent funct. ノ sequence トスル。其レニ對シテ (1) が conv. in measure to zero トスル. 即チ given $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$(2)\quad mE\left(\frac{\varepsilon n}{4} > s_n > \frac{-\varepsilon n}{4}\right) > 1-\delta_n$$

コヽニ $n\to\infty$ ノトキ $\delta_n\to 0$ (fixed $\varepsilon>0$). $S_m(t)>\varepsilon m$,

$\sum_{m+1}^{2n} X_i(t) > -\frac{\varepsilon n}{2}$ トスレバ $S_{2n}(t)>\varepsilon\left(m-\frac{n}{2}\right)\geqq\frac{\varepsilon n}{2}$

(但シ $m\geqq n$ トスル). 故ニ

$$(2)\quad \sum_{m=n}^{2n}\prod_{i=n}^{m-1} E(S_i(t)\leqq\varepsilon i)\cdot E(S_m(t)>\varepsilon m)\cdot E\Big(\sum_{i=m+1}^{2n} X_i(t) > -\frac{\varepsilon n}{2}\Big)\subset E\Big(S_{2n}(t)\geqq\frac{\varepsilon n}{2}\Big)$$

左ノ Σ ノ中ノ $\prod$ デ $m=n$ ノトキハ $S_n(t)>\varepsilon n$ ナル set ヲ表ハス。

$\frac{\varepsilon n}{4}>S_{2n}>-\frac{\varepsilon n}{4}$, $\frac{\varepsilon m}{4}>S_m>-\frac{\varepsilon m}{4}$ ナラバ

$$S_{2n}-S_m>-\frac{\varepsilon}{4}(n+m)\geqq-\frac{\varepsilon n}{2}.$$

故ニ $E\Big(\sum_{i=m+1}^{2n}X_i(t)>-\frac{\varepsilon n}{2}\Big)\supset E\Big(\frac{\varepsilon n}{4}>S_{2n}>-\frac{\varepsilon n}{4}\Big)\cdot E\Big(\frac{\varepsilon m}{4}>S_m>-\frac{\varepsilon m}{4}\Big)$

最後ノ product ノ set ノ measure ハ $1-\delta_{2n}-\delta_m$ ヲ越エナイ。

$\max_{n\leqq r\leqq 2n}\delta_r=\eta_{2n}$ トスレバ $1-\delta_{2n}-\delta_m\geqq 1-2\eta_{2n}$

サテ independence カラ

$$(1-2\eta_{2n})\ m\Big\{\sum_{m=n}^{2n}\prod_{i=n}^{m-1}E(S_i(t)\leqq\varepsilon i)\cdot E(S_m(t)>\varepsilon m)\Big\}$$

$$\leqq m\,E\Big(S_{2n}(t)\geqq\frac{\varepsilon n}{2}\Big)$$

左辺ノ $\{\quad\}$ ノ中ハ少クトモ一ツノ i $(n\leqq i\leqq 2n)$ ニ對シテ $S_i(t)>\varepsilon i$ ナル如キ set デアル。

之ヲ $e_n(\varepsilon)$ トスレバ

$$(1-2\eta_{2n})\, m\, e_n(\varepsilon) \leqq m\, E\left(S_{2n}(t) > \frac{\varepsilon n}{2}\right)$$

同様ニ $(1-2\eta_{2n})\, m\, e'_n(\varepsilon) \leqq m\, E\left(S_{2n}(t) > \frac{\varepsilon n}{2}\right)$

但シ $e'_n(\varepsilon)$ ハ少クトモ一ツノ $i\ (n \leqq i \leqq 2n)$ ニ對シテ $S_i(t) < -\varepsilon i$ ナル set デアル。故ニ $n \leqq i \leqq 2n$ ナルスベテ i ニ對シテ $|S_i(t)| < \varepsilon i$ ナル set ヲ $E_n(\varepsilon)$ トスレバ

$$\begin{aligned} m E_n(\varepsilon) &= 1 - m\left(e_n(\varepsilon) + e'_n(\varepsilon)\right) \\ &= 1 - m\, e_n(\varepsilon) - m\, e'_n(\varepsilon) \\ &\geqq 1 - \frac{1}{1-2\eta_n}\left(m E\left(S_{2n} > \frac{\varepsilon n}{2}\right) + m E\left(S_{2n} < \frac{-\varepsilon n}{2}\right)\right) \\ &\geqq 1 - \frac{\delta_{2n}}{1-2\eta_{2n}} \geqq 1 - \frac{\eta_{2n}}{1-2\eta_{2n}} \end{aligned}$$

$n \to \infty$ ノトキ $\eta_{2n} \to 0$ ナル故ニ

$$m E_n(\varepsilon) \geqq 1 - \theta \eta_{2n}$$

ガ $n \geqq n_0$ デ成立スル θ ハ n ニ無關係ナ常數デアル。即チ $n \geqq n_0$ デスベテノ $i\ (n \leqq i \leqq 2n)$ ニ對シテ $|S_i(t)| > \varepsilon i$ ナル set ノ measure ハ $\theta \eta_{2n}$ ヲコサナイ。

今 $2^{K_0} \geqq n_0$ ナル如ク K_0 ヲトリ $2^{K_0}, 2^{K_0+1} \cdots\cdots$ トスルコトニヨリ $|S_i(t)| \geqq \varepsilon i$ ガ $i \geqq 2^{K_0}$ ナルスベテノ i ニ對シテ成立スル如キ set ノ measure ハ $a \sum_{i=K_0}^{\infty} \eta_{2^i}$ ヨリ小デアル。

今 $\sum \eta_{2^i} < \infty$ ナル如ク η_n 從ッテ δ_n ガ條件附ケラレ

テキタトスレバ是レヨリ殆ンドスベテノ点デ $\dfrac{s_i(t)}{2} \to 0$ ガ得ラレルコトハ明カデアラウ。依ッテ次ノ定理ヲ得ル。

$\boxed{\text{定理}}$ $mE\left(\varepsilon > \dfrac{S_n}{n} > -\varepsilon_n\right) > 1-\delta_n$ トシ $\delta_n=\delta_n(\varepsilon)$ ガ次ノ條件ヲ満足シタトスル。

$$\max_{2^{K-1}<n\leqq 2^K} \delta_n = \eta_K \quad \text{トシタトキ} \quad \sum_{K=1}^{\infty} \eta_K < \infty$$

而ルトキハ $\dfrac{S_n(t)}{t}$ ハ殆ンドスベテノ点デ 0 = conv. スル。

3. 上ノ定理ヲ用ヒテ Kolmogoroff ノ定理ヲ出シテ見ル。

<u>Kolmogoroff ノ定理:</u> X_n^2 ノ measure ヲ $E(X_n^2)=b_n$ トスルトキ，モシ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} < \infty$$

ナラバ $\{X_i\}$ ハ s. l. l. n ニ従フ。

コノ種ノ定理ハ $E(X_n)$，$E(X_n^2)$ ノ存在シナイ場合ニモ Khintchine-Kolmogoroff ノ equivalent method ヲ用フレバ容易ニ拡張出来ル. 今ソレニ触レズ上述ノ所デ考ヘル。

$E(s_n^2)=\sum_{i=1}^{n} b_i$ ナル故ニ Tchebycheff ノ不等式カラ

(2) $mE\left(|S_n| \geqq nR\right) \leqq \dfrac{1}{n^2R^2}\sum_{i=1}^{n} b_i$

故ニ $\eta_k = \max_{2^{k-1}<n\leqq 2^k} \delta_n = \max_{2^{k-1}<n\leqq 2^k} \dfrac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n} b_i$

$$\leqq \frac{4}{\varepsilon^2 2^{2k}}\sum_{i=1}^{2^k} b_i$$

故ニ $\sum_{1}^{\infty} \eta_k \leqq \dfrac{4}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{2k}} \sum_{i=1}^{2^k} b_i$

$$\leqq \frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty}\left(\frac{1}{2^m}\right)^2 \cdot \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} b_i$$

$$\leqq \frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^2 \sum_{i=2^k+1}^{2^{k-1}} b_i \leqq \frac{32}{\varepsilon^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{b_n}{n^2}$$

故ニ Kolmogoroff ノ定理ガ証明サレタ。

注意. Kolmogoroff ハ (2) ノ不等式ノ代リニ Kolmogoroff 自身ノ

(3) $mE\left(\max_{1\leqq\nu\leqq n} |S_\nu| \geqq nR\right) \leqq \dfrac{1}{n^2R^2}\sum_{i=1}^{n} b_i$

ヲ用ヒテ同様ニ証明シタ (2) ト (3) トヲ比較スルト (3) ノ方ガ遥カニ六ヶ敷イ。吾々ノ場合ニハ §2 ノ定理ヲ用ヒレバ (3) ヲ用ヒズニ (2) デ充分ナルコトヲ示シテヰル。