837. 中野氏ノ談話ニツイテ

角谷　靜夫（阪大）

P. Q ヲ Hilbert space $\mathfrak{H}$ ノ任意ノ二ツノ Projection トスルトキ（必ズシモ PQ = QP デナイトスル）$\lim\limits_{n\to\infty}(PQ)^n = R$ ガ strongly ニ存在シテ、シカモ R ガ P 及ビ Q ノ定メル Manifold $\mathfrak{M}_P$, $\mathfrak{M}_Q$ ノ共通部分 $\mathfrak{M}_P \cdot \mathfrak{M}_Q = \mathfrak{M}_R$ ヘノ projection ニナッテヰルコトヲ中野氏ガ証明サレタ。中野氏ハコノ定理ヲ Hermitian operator ニ関スル spectral representation ヲ使ッテ証明サレタ．本談話ニ於テハ spectral representation ヲ使ハナイ証明ヲ與ヘヨウ。

先ヅ最初ニ $\mathfrak{M}_P \cdot \mathfrak{M}_Q = 0$ ナル場合ニ $(PQ)^n \to 0$ (strongly) トナルコトヲ証明スレバ十分デアルコトニ注意スル．

コレヲ示スタメニ $\mathfrak{m}_P\cdot\mathfrak{m}_Q=\mathfrak{m}_R$ トオキ $\mathfrak{m}_R$ ヘノ projection ヲ R トスレバ $RP=PR=RQ=QR=R^2=R$ デアル。ヨッテ $(PQ)^n=(R+(PQ-R))^n=(R+(P-R)(Q-R))^n$
$=R+((P-R)(Q-R))^n$

然ルニ $\mathfrak{m}_{P-R}\cdot\mathfrak{m}_{Q-R}=0$ ナル故 $((P-R)(Q-R))^n\to 0$ (strongly) ニヨッテ $(PQ)^n\to R$ (strongly).

次ニ $\mathfrak{m}_P\cdot\mathfrak{m}_Q=0$ ナルトキ $(PQ)^n\to 0$ (strongly) トナルコトヲ証明シヨウ. 任意ノ $x\in\mathfrak{h}_y$ ニ対シテ $(PQ)^n x=x_n$, $Q(PQ)^n x\equiv Qx_n=x'_n$ トオク。
$\|x_n\|\geqq\|x'_n\|\geqq\|x_{n+1}\|$ デアル. 先ヅ $x_n\to 0$ (weakly) ナルコトヲ証明スル。$\mathfrak{h}_y$ ハ locally weakly compact デアルカラ、コレヲ示スニハ任意ノ $\{x_n\}$ ノ部分列 $\{x_{n_\nu}\}$ ガ弱収斂シタトキソノ極限 $\bar{x}$ ガ 0 以外デハアリ得ヌコトヲ示セバヨイ。然ルニ $x_{n_\nu}\to\bar{x}$ (weakly) ナラバ $x_{n_\nu+1}=PQx_{n_\nu}\longrightarrow PQ\bar{x}$ (weakly) ニテ且ツ $\|x_{n_\nu}-x_{n_\nu+1}\|^2\leqq(\|x_{n_\nu}-x'_{n_\nu}\|+\|x'_{n_\nu}-x_{n_\nu+1}\|)^2$

$$\leqq 2(\|x_{n_\nu}-x'_{n_\nu}\|^2+\|x'_{n_\nu}-x_{n_\nu}\|^2)$$

$$=2(\|x_{n_\nu}\|^2-\|x'_{n_\nu}\|^2+\|x'_{n_\nu}\|^2-\|x_{n_\nu+1}\|^2)$$

$$=2(\|x_{n_\nu}\|^2-\|x_{n_\nu+1}\|^2)\to 0$$

デアルカラ $PQ\bar{x}=\bar{x}$ デナケレバナラヌ. コレヨリ $P\bar{x}=Q\bar{x}=\bar{x}$ ヲ得ルカラ $\bar{x}=0$ デナケレバナラヌ。

コレデ $x_n\to 0$ (weakly) トナルコトが証明出来.

ヤ。$x_n \to 0$ (strongly) トナルコトハ

$$\|x_n\|^2 = ((PQ)^n x, (PQ)^n x) = (x, (QP)^n (PQ)^n x)$$

$$= (x, Q(PQ)^{2n-1} x) = (x, x'_{2n-1}) \to 0$$

トナルコトヨリワカル。

コレデ定理ノ証明ガ終ル。同様ニシテ更ニ任意ノ有限個ノ projection $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_k$ ニ対シテ $(P_1 P_2 \cdots\cdots P_k)^n \to R$ (weakly) (R ハ $\mathfrak{m}_{P_1} \cdot \mathfrak{m}_{P_2} \cdots\cdots \mathfrak{m}_{P_k} \equiv \mathfrak{m}_R$ ヘノ projection) トナルコトガワカル。シカシコレガ強収斂デオキカヘラレルカドウカハ必ズワカラナイ。