831 Stationary distribution ヲモツ Markoff process ニツイテ I

角谷　静夫（阪大）

§1. Introduction

例ノ如ク空間 Ω ニ於ケル simple, homogeneous ナ Markoff process ガ $P(t, E)$ ナル kernel ニヨッテ與ヘラレタトスル。Ω ニ於ケル completely additive ナ集合函數 $\varphi(E)$ ガ存在シテ $\int \varphi(dt) P(t, E) = \varphi(E)$ トナルトキ Markoff process $P(t, E)$ ハ stable distribution $\varphi(E)$ ヲモツトイフ。特ニ $\varphi(E)$ ガ uniform distribution $\varphi(E) = m(E)$ デアルトキ $P(t, E)$ ハ stable uniform distribution ヲモツトイフ。

カヽル Markoff process ニ對シテ mean ergodic theorem ガ成立スルコトヲ吉田氏ガ証明サレタ。（本号ノ吉田氏ノ談話参照）即チ $\varphi(E)$ ニ對シテ absolutely integrable ナ函數全体ヲ $L(\varphi)$ ニテ表ハセバ $x(t) \in L(\varphi)$ ナルトキ $T^n x = y_n$; $y_n(t) = \int P^{(n)}(t, ds)\, x(s)$ トオケバ $y_n(t) \in L(\varphi)$ トナリ[1] 且ツ任意ノ $x(t) \in L(\varphi)$ ニ對シテ $x^*(t) \in L(\varphi)$

(1) Operator T^n ハ $L(\varphi)$ ニ於テ norm 1 トナル。

ガ存在シテ、

$$\int \left| X^*(t) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\int P^{(n)}(t, ds)\, x(s) \right| \varphi(dt) \to 0$$

トナル。

コレハ非常ニ面白イ結果デアルト思フ。先ヅ第一ニ実際問題ニ表ハレテ来ル Markoff process ハ大テイ stable distribution ヲモッテヰル。特ニ uniform stable distribution ヲモツトキガ大ヘン多イノデアル。

例ヘバ $P(t, E)$ ガ density $p(t, s)$ ヲモチ（即チ $P(t, E) = \int_E p(t, s)\, ds$）且ツコノ density $p(t, s)$ ガ t, s ニ関シテ symmetric デアル場合ガソレデアル。又 $P(t, E)$ ガ measure preserving transformation $S(t)$ ニヨツテ與ヘラレルトキ、（即チ $S(t) \in E$ ナルトキ $P(t, E) = 1$. 然ラザルトキ $P(t, E) = 0$）ハソノ例デアル。

後者ノ場合ニハ良ク知ラレテヰル如ク J. v. Neumann ノ mean ergodic theorem ガ成立スルカラ以上ノ吉田氏ノ結果ハ v. Neumann ノ ergodic theorem ヲ特殊ナ場合トシテ含ムワケデアル。[1]

第二ニ上ノ mean ergodic theorem ハ uniform ergodic theorem ノ成立シナイ mean ergodic theorem ノ一ツノ一般ナ example ヲ

脚註ハ次頁ヘ

與ヘルト云フ意味デ重要デアル。

即チ、J. V. Neumann ノ mean ergodic theorem ハ吉田氏及ビ筆者ニヨツテ inverse ノ存在シナイ markoff process ノ場合ニ拡張サレタガ（Doob 及ビ Doeblin ノ case）コレラノ場合ニハ単ニ mean ergodic theorem ガ成立スルノミナラズ更ニソレヨリモ強イ uniform ergodic theorem ガ成立シテシマフノデアル。ヨツテ mean ergodic theorem ガ成立シテシカモ uniform ergodic theorem ノ成立シナイ example ガ欲シカツタノデアル。

（L^p）（$p>1$）ノトキニハカヽル example ハ容易ニ作レルガ（L'）=（L）ノ Markoff process ノ時ハ measure preserving transformation ノ場合以外ニカヽル example ヲ作ルコトハ困難デアツタノデアル。

吉田氏ノ上ノ結果ノ証明ハ elementary デ非常ニ面

前頁脚註

(1) J. V. Neumann ノ mean ergodic theorem ハ（L^2）ニテ述ベラレテヰルガ（L）=（L'）ニ於テモ（strong ナ収斂ノ）mean ergodic theorem ガ成立スルノデアル。

（L）=（L'）ハ uniform (stablé) distribution $\varphi(E)=m(E)$ ニ関スル $L(\varphi)$ ニ外ナラヌ。

白イモノデアルガ、實ハソレヨリモモウ少シ精シイ結果ガDoobノ方法ヲ使ヘレバ得ラレルノデ次ニソレニツイテ述ベテ見タイト思フ。

即チ $L(\varphi)$ ヲ考ヘル代リニ $M(\varphi)$ ナル φ ニ関シテ bounded measurable ナ函數ノ空間 ($\varphi(E)=0$ ナル E ノ上ニテ取ル値ハ任意) ヲ考ヘレバ $x(t)\in M(\varphi)$ ニ對シテ $T^n x = y_n$ $y_n(t) = \int P^{(n)}(t, dS)\,x(S)$ ハ又 $M(\varphi)$ ニ屬シテ[1]且ツ任意ノ $x(t)\in M(\varphi)$ ニ對シテ $x^*(t)\in M(\varphi)$ ガ存在シテ

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{m}\int P^{(m)}(t, dS)\,x(S)$$

ハ $x^*(t)$ ニ φ ニ関シテ almost everywhere ニ收斂スル。即チ $x\in M(\varphi)$ ニ関シテ Birkhoff 型ノ ergodic theorem ガ成立スルノデアル。(コレハ§3デ證明スル)

Operator T ($x \cdot \ni Tx = y$) ガ $L(\varphi)$ ヲ $L(\varphi)$ ニウツシ且ツ $M(\varphi)$ ヲ $M(\varphi)$ ニウツシ、シカモ何レモnormガ 1 デアル場合ニ、$M(\varphi)$ ニ於ケルBirkhoff typeノ ergodic theorem カラ $L(\varphi)$ ニ於ケル v. Neumann type ノ mean ergodic theorem ヲ證明スルコトハ容易デアルカラ (コレハ§2ニテ證明スル)

---

(1) Operator T^n ハ $M(\varphi)$ ニテ norm 1 トナル。

コレニヨツテ吉田氏ノ結果ヨリモ少シ精シイコトガ得ラレタダケデアル。Doob ハコノ結果ヲ特殊ナ場合ニシカ論ジテヰナイノデ果シテドコマデ Doob ガコノ問題ヲ考ヘテヰタカハ疑問デアル。

シカモ Doob ハ mean ergodic theorem ハ少シモ論ジテヰナイカラ Doob ガ吉田氏ノ結果ヲ全然得テヰナイコトハ確実デアル。

シカシコヽニ注意スベキコトハ $X(t) \in M(\varphi)$ ニ對シテノミ Birkhoff 型ノ ergodic theorem ガ証明出来テ $X(t) \in L(\varphi)$ ニ対スル Birkhoff 型ノ ergodic theorem ガ未ダ証明出来テヰナイコトデアル。$P(t, E)$ ガ measure preserving transformation $S(t)$ ニヨツテ與ヘラレルトキハ確カニコレハ成立スルノデアルカラ、一般ノ stable distribution ヲモツ場合ニ果シテ $X(t) \in L(\varphi)$ ニ関スル Birkhoff 型ノ ergodic theorem ガ成立スルカドウカヲ確カメルコトハ大ニ興味ガアルト思フ。

§2

Birkhoff ノ ergodic theorem カラ v. Neumann ergodic theorem ヲ証明スルコト。

議論ヲ簡単ニスルタメ Ω ガ $0 \leqq t \leqq 1$ ナル interval デ stable distribution $\varphi(E)$ ガ uniform distribution $m(E)$ デアル場合ヲ考ヘル。(一般ノ

場合ハ全然同ジ)

即チ Simple, homogeneous ナ Markoff process ノ kernel $P(t,E)$ ガ $\int_0^1 P(t,E)\,dt = m(E)$ ヲ満足シテヰルトキヲ考ヘル. 特ニ $P(t,E)$ ガ measure preserving transformation $S(t)$ ニヨツテ $S(t)\in E$ ナルトキ $P(t,E)=1$, 然ラザルトキ $P(t,E)=0$ トシテ與ヘラレルトキハ普通ノ Birkhoff 及ビ v. Neumann ノ ergodic theorem ノ場合デアル。

$x(t)\in(L)$ ニ對シテ $Tx=y$: $y(t)=\int_0^1 P(t,ds)\,x(s)$

トオケバ $y(t)\in(L)$ デアリ、特ニ $x(t)\in(M)$ ナラバ $y(t)\in(M)$ トナル. シカモ容易ニワカル如ク $x\to Tx=y$ ナル linear operator ハ (L) ヲ (L) 自身ニウツス operator トシテモ亦 (M) ヲ (M) 自身ニウツス operator トシテモ norm 1 デアル. 今 (M) ニ於テ Birkhoff ノ定理ガ成立スルトセヨ。

即チ $x(t)\in(M)$ ニ對シテ $x^*(t)\in(M)$ ガ定マツテ

$$(a)\quad \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\int P^{(m)}(t,ds)\,x(s)\longrightarrow x^*(t)\quad \text{almost everywhere}$$

デアツタトセヨ. コノ左辺ハ明カニ n,t 關シテ一様ニ有界デアルカラ t ニ關シテ $(0,1)$ ニテ積分スレバ

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \int P^{(m)}(t, ds)\, x(s) - X^*(t) \right| dt \to 0$$

即チ（operator ノ記号デカケバ）

$$(*) \quad \left\| \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} T^m(X) - X^* \right\|_L \to 0$$

ガ任意ノ $X \in (M)$ ニ對シテ成立スル。但シ $\| \;\; \|_L$ ハ (L) ニ於ケル norm ヲ表ハス。然ルニ (M) ハ (L) ノ中ニテ (L) ノ topology ニテ dense デアリ且ツ

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} T^m(X) - X^* \right\| \leqq \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \| T^m(X) \| + \| X^* \|$$

$$\leqq 2\|X\|$$

デアルカラ (*) ハ任意ノ $X \in (L)$ ニ對シテ成立スル。 即チ (L) ニ於ケル mean ergodic theorem ガ証明出來タ。

次ニ、特ニ $P(t, E)$ ガ measure preserving transformation $S(t)$ ニヨツテ與ヘラレルトキハ $X \to T(x) = y$ ハ (L^p) $(p > 1)$ ニ於ケル norm 1 ノ linear operator ト考ヘラレルカラ全ク同ジ方法ニヨツテ (L^p) $(p > 1)$ ニ於ケル mean ergodic theorem ヲ証明スルコトガ出來ル. 即チ (△) ヨリ

$$\sqrt[p]{\int_0^1 \left| \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \int P^{(m)}(t, ds)\, x(s) - X^*(t) \right|^p dt} \to 0$$

ヨツテ

$$(**) \quad \left\| \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} T^m(X) - X^* \right\|_{L^p} \to 0$$

ガ $X \in (M)$ ニ對シテ成立スル．但シ $\| \quad \|_{L^p}$ ハ (L^p) ニ於ケル norm ヲ表ハス．然ルニ (M) ハ (L^p) ニテ (L^p) ノ topology ニテ dense デアリ且ツ

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} T^{m}(x) - x^{*} \right\|_{L^p} \leqq 2\|x\|_{L^p}$$

デアルカラコレヨリ(＊＊)ガ任意ノ $X \in (L^p)$ ニ対シテ成立スル。コレデ (L^p) ニ於ケル mean ergodic theorem ガ証明出来タ。

注意．深宮氏[1]ハ (L) ニ於ケル Birkhoff ノ ergodic theorem カラ (L^p) $(p>1)$ ニ於ケル mean ergodic theorem ガ出ルコトヲ dominated ergodic theorem ヲ使ッテ証明シテヰルガ以上ノヤウナ考ヘニヨレバ遥カニ簡単デアル。

---

(1) M. Fukamiya. Dominated ergodic theorems, Tôhoku Math. Journ.