

830. Markoff Process with Stationary Distribution, II

吉田 耕作 (阪大)

Ω を任意の空間とし, \mathcal{B} を部分集合の作ルーツ / Borel Körper $B(\Omega)$ を考へル ($\Omega \in B(\Omega)$ とシテ可). 今 simple Markoff Process = ヲツテ Ω の点が確率的な遷移運動ヲ行ツテアルモノトスルコト, Process = ヲリ, 点 $x \in \Omega$ が単位時間後 $E \in B(\Omega)$ = 移ル確率ヲ $P(x, E)$ トスルト

$$P(x, E) \geq 0 \quad \text{且ツ} \quad P(x, \Omega) \equiv 1$$

analysis を推シ進メルタメニ, $P(x, E)$ の x を fix シタトキ $E \in B(\Omega)$ = 関シ *completely additive*, 又 E を fix シタトキ $x \in \Omega$ = 関シ *measurable*¹⁾ トスル。然ラバ, x が n 単位時間後 E = 移ル確率 $P^n(x, E)$ の順次

$$P^{(n)}(x, E) = \int_{\Omega} P^{(n-1)}(x, dy) P(y, E)$$

$$(P^{(1)}(x, E) = P(x, E)),$$

= ヲツテ定義サレル。

前談話²⁾ の所論ヲ一般化シテ, 次ノ假定ノモトニ $P^{(n)}(x, E)$ / $n \rightarrow \infty$ ナル場合, asymptotic

D 任意の $\alpha < \beta$ = 対シ $\frac{1}{n} \{ \alpha \leq P(x, E) < \beta \} \in B(\Omega)$ トナルコト。

2)

behaviour を調べる, 即ち

non-negative 且つ $E \in B(\Omega) =$ 関シ
completely additive + set function $\varphi(E)$
が存在シ

$$(1) \quad \varphi(\Omega) = 1$$

$$(2) \quad \int_{\Omega} \varphi(dx) P(x, E) = \varphi(E)$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{距離 } d(E_1, E_2) = \varphi(E_1 + E_2 - E_1 \cdot E_2) / \\ \text{意味ヲ } B(\Omega) \text{ が separable} \end{array} \right.$$

コノトキ次, mean ergodic theorem が成リ立ツ。
measurable 且つ $\int_{\Omega} |f(x)| \varphi(dx) < +\infty$ ナル点
函数 $f(x)$ 全体, 作ル Banach space (norm

$$\|f\| = \int_{\Omega} |f(x)| \varphi(dx) \text{ ヲ } L(\varphi) \text{ ト書クト}$$

定理 任意, $f \in L(\varphi) =$ 對シ ($n=1, 2, \dots$ 又
 $E \in B(\Omega)$)

$$i) \quad f^{(n)}(x) = \int_{\Omega} P^{(n)}(x, dy) f(y) \in L(\varphi)$$

1) 此ノ假定ハ φ が普通, Euclid 空間, Lebesgue 測
度ナル場合ニハ満足サレテ, 又コノ距離ノ意味ヲ
 $B(\Omega)$ が complete = ナルコトハヨク知ラレテヲ
ル。

$$i) \int_{\Omega} f(x) \varphi(dx) P^{(n)}(x, E) = \int_E f^{(-n)}(y) \varphi(dy),$$

$$f^{(-n)} \in L(\varphi)$$

ii) $f^* \in L(\varphi)$ 及 $f^{-*} \in L(\varphi)$ が定マテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| f^*(x) - \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f^{(m)}(x) \right| \varphi(dx) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| f^{-*}(x) - \frac{1}{n} \sum_{m=-1}^{-n} f^{(-m)}(x) \right| \varphi(dx) = 0$$

注意 我々、Markoff Process (with stationary distribution φ) の相当一般デアリマス。即チ steady flow (deterministic transition process) の場合ヲモ含ムカラデアリマス。ソレ ν $= \nu \circ T^{-1}$ 、 Ω へ、one-to-one 且ツ measure-preserving 変換¹⁾ T 考ヘテマラス。コノトキ $E \in \mathcal{B}(\Omega)$ 、characteristic function $C_E(x)$ 考ヘ

$$C_E(T \cdot x) = P(x, E)$$

ト置クトコノ P へ M.P. with S.D. が定義スルコトハ直チニワカリマス。又 $f \in L(\varphi) = \text{對シ}$

$$f^{(n)}(x) = f(T^n \cdot x), \quad f^{(-n)}(x) = f(T^{-n} \cdot x)$$

トナルコトモワカリマス。ヨツテ上、**定理** へ deterministic

i) $\mathcal{B}(\Omega)$ 、集合 E 同シク $\mathcal{B}(\Omega)$ 、集合 $T \cdot E =$ 移シ且ツ $\varphi(E) = \varphi(T \cdot E)$ トナルコト。

及ビ *indeterministic case* = 對シ同時 = M.E.T.
ヲ與ヘル譯デ、従来 *vollstetig* + *Markoff Process*
許リ取り扱ツテフツタノ一對シテ進歩シタ訳デアリ
マセリ。所カ角谷君 = 之ヲオ話シタ所次ノ様ナ essential
+ 注意ヲ受ケマシタ。

同君 = ヨレバ J. L. Doob ノ論法¹⁾ヲ *modify*スレ
バ f ガ有界函数ノ場合ハ 定理 = 於ケル 平均收斂ガ
measure φ = 關シテ almost everywhereノ
收斂デ置キ換ヘ得ルノデアリマス。²⁾ コノ方が結果ガ宜
シイ!! ト云フノハ a.e. 收斂カラ平均收斂²⁾ハ出ルケレド
モ逆ハ一般ニ然ラズカカラデアリマス。Doobノ論法ト
云フノハ無限次元積空間ヲ考ヘコトデ Birkhoffノ
*ergodic theorem*ヲ使ハウト云フノデアリマス。但
シDoobガ果シテ角谷君ガ今度考ヘラレタ程度 = 意識的
= 考ヘケカドウカハ疑問ノマウニ思ハレマス。ト云フノハ
Doobハ上ノ定理 = 於テ f ガ可測集合 $E (\in B(\mathcal{B}))$
ノ *characteristic function*ノ場合シカマツテ
アリマセンシ、又 *Markoff Process*ヘノ具體的ノ
應用例 = 於テハ極メテ特殊ノ場合シカ取扱ツテアリマセン。

1) J. L. Doob: Stochastic processes with an integral-
valued parameter, Trans. Amer. Math. Soc. 44
(1938), pp. 87-150.

2) 次ノ角谷君ノ談話参照

境ハ筆者ハ Doob ノ論文ヲ良ク讀マズニ、コノ應用例
ノミヲ眺メテフツタ次第デ不勉強ガツタ誤デシタ。

積空間 = measure ヲ入レ B.E.T. ヲ使フト云
フノニハ相當面倒ナ議論ヲセネバナリマセンシ、又以下
ニ述ベル方法ハ方法トシテ拙ラナクハナイ様ニモ思ハレマス
、テ定理ノ証明ヲ記録シトキマス。

定理ノ証明

i) $\|f\|_M = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$ ナル場合ヲ考ヘルト明カニ
 $\|f\|_M \geq \|f\|$ 。コノトキハ $f^{(n)}(x) = \int P^{(n)}(x, dy) f(y)$

ハ確カニ定義デキテ $\|f^{(n)}\|_M \leq \|f\|_M$ 。又

$$\int_{\Omega} |f^{(n)}(x)| \varphi(dx) \leq \int_{\Omega} \varphi(dx) \int_{\Omega} P^{(n)}(x, dy) |f(y)|$$

$$= \int_{\Omega} |f(y)| \varphi(dy) \left(\int_{\Omega} \varphi(dx) P^{(n)}(x, E) = \varphi(E) = \right.$$

ヨル) $\therefore \|f^{(n)}\| \leq \|f\|$ 即チ $f \rightarrow f^{(n)}$ ナル

linear operation ハ有界ナ可測函数ヲ有界ナ可
測函数ニ寫シ norm $\| \cdot \|_M$ ヲモ norm $\| \cdot \|$ ヲモ高

メナイ。コノ事實カラ $f \in L(\varphi)$ ノ場合、i) ガ証明デキル。

即チ f non-negative トシ $f_n(x) = \text{Min.}(n, f(x))$

トナク $f_n(x)$ ハ有界ガカラ

$$f_n^{(m)}(x) \leq f_{n+1}^{(m)}(x) \quad \text{且ツ} \quad \|f_n^{(m)}\| \leq \|f_n\| \leq \|f\|.$$

故ニ殆ド全テノ x (measure φ = 關シテ、a.e.) ノト)

= 對シテ, Fatorノ定理ヲ用ヒ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(m)}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} P^{(m)}(x, dy) f_n(y)$$

$$= \int_{\Omega} P^{(m)}(x, dy) \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) \right\} = \int_{\Omega} P^{(m)}(x, dy) f(y)$$

が成リ立ツ。故ニ $\|f_n^{(m)}\| \leq \|f\|$ ヲ用ヒ $f^{(m)}$ ノ存在ト

共ニ

$$\|f^{(m)}\| \leq \|f\|$$

ガ云ヘタコトニナル, 故ニ $f \rightarrow f^{(n)}$ ハ $L(\varphi)$ ノ $L(\varphi)$ 内ニ線型寫像 P^n ヲ定メ且ツ P^n ノ norm 1ナルコトガ容易ニワカル。上ニ述ベタ如ク P^n ハ $L(\varphi)$ ノ中ニ有界函數ノ norm $\|\cdot\|_M$ ヲ高メ +1。

— 以上 —

i). $E \in \mathcal{B}(\Omega)$ ニ對シテ completely additive + set function $\Phi(E) =$ 對シ norm $\|\Phi\|_{\nabla} =$ Total Variation of $\Phi =$ ヲツテ定義スルト Banach 空間 \mathcal{M} ガ定義サレル。

$$\int_E \Phi(dx) P^{(n)}(x, E) = \Phi^{(-n)}(E)$$

= ヲツテ \mathcal{M} ノ \mathcal{M} 内ニ線型寫像 (norm ≤ 1 — 實ハ = 1) \bar{P}^n ガ定義サレルコトハ明ラカデアル。所ガ

$$\Phi(E) = \int_E f(x) \varphi(dx) \quad f \in L(\varphi)$$

+ル場合 = $\mu^{(-n)}$ の實 μ の measure φ = 関して
absolutely continuous = +ル。何者、 $f(x)$
 が有界函数ノトキハ

$$|\mu^{(-n)}(E)| \leq \int_{\Omega} \|f\|_M \varphi(dx) P(x, E) = \|f\|_M \varphi(E)$$

カラ明カ。所ガ f non-negative 且 $f \in L(\varphi)$ ノ
 トキハ $f_n(x) = \text{Min.}(n, f(x))$ トテイテ

$$\int_{\Omega} \mu(dx) P^{(n)}(x, E) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_m(x) \varphi(dx) P^{(m)}(x, E)$$

所ガ右辺ハ $f_m(x)$ ノ有界函数ナルコトカラ、上述 = $\exists \parallel$

absolutely continuous + ϵ / / *limes*. 故 =

Vitali-Hahn-Saks 定理¹⁾ = $\exists \parallel \int_{\Omega} \mu(dx) P^{(m)}(x, E)$

ハ又 *absolutely continuous*. 従って *Radon-Nikodym*

ノ定理 = $\exists \parallel$

$$\int_{\Omega} \mu(dx) P^{(m)}(x, E) = \int_E f^{(-n)}(y) \varphi(dy).$$

— 以上 —

ii) $L(\varphi)$ ノ中デ有界且ツ可測ノ函数ハ *norm* $\parallel \parallel$

ノ意味デ *dense*: 又 operator P^n ハ全テ *norm* 1,

従って operator

$$\frac{P + \dots + P^n}{n}$$

ハ全テ *norm* ≤ 1 . 故 = 有界函数 $f (\in L(\varphi))$ = 對シ

テ ii) ガ云へルバ充分デアル。ソコデ

f が有界函数トスルト

$$f_{(n)} = \frac{P + \dots + P^n}{n} \cdot f$$

$\wedge \|f_{(n)}\|_M \leq \|f\|_M$ が満足スル。ソコデ集合函数列

$$F_{(n)}(E) = \int_E f_{(n)}(x) \varrho(dx)$$

\wedge equi-absolutely continuous. 所が $B(\mathcal{B})$ の metric $d(E_1, E_2) = \varrho(E_1 + E_2 - E_1 \cdot E_2)$ の意味デ separable ト云フ假定がアツタカラ, 適當 = 部分列

$\{F_{(n)}(E)\}$ がトレバ 全テ $E \in B(\mathcal{B}) =$ 對シテ

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} F_{(n')}(E) = F^*(E)$$

が存在スル。毎ビ Vitali - Lebesgue - Baks の定理 = ヨ

1) F^* は absolutely continuous. ヨツテ Radon-Nikodym の定理 = ヨリ $F^*(E) = \int_E f^*(x) \varrho(dx)$,

$f^* \in L(\varrho)$. コノ f^* が $\{f_{(n')}\}$ の weak + limit

= ナツテルコトハ直チ = ヲカル。ソコデ M. E. T. = ヨリ

$\{f_{(n)}\}$ 自身が f^* = 強收斂 スル。

—— 以上 ——