829. Vitali-Hahn-Saks ノ定理ニ関聯シテ

國澤 清典（阪大）

Tヲ任意ノ抽象空間トシ $\mathfrak{F}$ヲTヲ含ムヤウナTノ部分集合カラ出來ル Borel family トスル。$\alpha(E)$ハ$\mathfrak{F}$デノ nonnegative ナ completely additive ナ集合函數デ $\alpha(T)<\infty$ トスル。$F(x)$ハ$\mathfrak{F}$デノ有限數値集合函數デ completely additive デ且ツ absolutely continuous トスル。

$\mathfrak{F}$ニ屬スニツノ元素ヲ E_1, E_2 トスルト $\alpha(E_1-E_1E_2)+\alpha(E_2-E_1E_2)=d(E_1, E_2)$デ距離ヲ定義スルト$\mathfrak{F}$ハ完備距離空間ニナルコトハ良ク知ラレテヰル。コノトキ上ノ$F(x)$ハ此ノ完備距離空間$\mathfrak{F}$デノ continuous functional ト考ヘルコトガ出來ル。

次ニ述ベル定理ハ特殊ナ形デ先ヅ Hahn ニヨリ證明サレ、ツヅイテ Saks ニ依リ次ノヤウナ一般ナ形ノ下デ證

明サレタ[1]モノデ通常 Vitali-Hahn-Saks (又ハ Hahn-Saks) ノ定理ト呼バレテイル。

$\boxed{\text{定理}}$ $\{F_n(x)\}$ ヲ completely additive デ absolutely continuous ナ集合函数ノ系列トスル。$\{F_n(x)\}$ が距離空間 $\mathfrak{X}$ デノ第二類ノ集合 H ニ属スル元素ニツイテ収斂スルナラバ $F_n(x)$ ハ equi-absolutely continuous ニナル。

此ノ重要ナ定理が普通ノ書物ニハ載ツテヲラナイ様ダカラ先ヅ証明ヲ紹介シテヲキマス。

$\boxed{\text{証明}}$ $\{F_n(x)\}$ が H デ 0 ニ収斂スルト考ヘテ良イ[2]。然ル時 $\varepsilon>0$ ヲ如何ニ與ヘテモ

$$|F_n(X)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

がスベテノ $X \in K_0$ ト $n \geqq n_0$ ニ對シテ成立スルヤウナ n_0 ト半徑 r ノ $\mathfrak{X}$ デ球 K_0 が存在スル。何トナラバ $m \geqq n$ ナルスベテノ m ニ對シ $|F_m(X)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ ナルヤウナ $X \in \mathfrak{X}$ ノ集合ヲ H_n トオケバ

$$H \subset \sum_n H_n$$

が云ヘテ H ハ第二類ノ集合デアルカラ H_{n_0} が又第二類ノ集合

---

1) S. Saks: Addition to the note on some functionals. T.A.M.S. Vol 35. (1933)

2) 若シ然ウデナケレバ $\{F_n(X)-F_m(X)\}$ ナル系列ヲ考ヘルコトニヨツテ

デルヨウナ n_0 ガ存在スル。他方 $F_n(X)$ ハ初メニ述ベタ距離ノ意味デ連続ナル故スベテノ H_n ハ閉集合デアル。故ニ H_{n_0} ハ半径 r ノ球 $K_0 = K_0(X_0; r)$ ヲ含ミ K_0 デハ $n \geq n_0$ ニ対シ $|F_n(X)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ デアル。然ルニ空間ξノ元素ニシテ $d(E, 0) = d(E) \leq r$ ナル任意ノ E ニ對シ次ノ様ナミノ元素 E_1, E_2 ガ存在スル。

$$E_1 = E_2 + E, \quad E_1 \in K_0, \quad E_2 \in K_0$$

之レヲ使ヘバ $n \geq n_0$ ニ對シ

$$|F_n(E)| \leq |F_n(E_1)| + |F_n(E_2)| \leq \varepsilon$$

之レヨリ F_n ノ *equi-absolutely continuous* ハ容易ニ云ヘル。

—— 以　上 ——

此レト類似ナ方法デ次ノ定理[3]ヲ証明スルコトガ出来ル。

$\boxed{\text{定理}}$ $\{F_n(X)\}$ ヲ *complete additive absolutely continuous set function* ノ系列トシミノスベテノ X ニツイテ

$$\overline{\lim_{n}} |F_n(X)| < \infty$$

ガ成立スレバミノスベテノ X ニツイテ一様ニ

$$|F_n(X)| < M \qquad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

ガ成立スル様ナ M ガ存在スル。

此ノ定理ヲ以下 *Saks* ノ定理ト呼ブコトニスル。

---

3) S. Saks: *loc. cit.*

以上ノ Vitali-Hahn-Saks ノ定理及ビ Saks ノ定理ヲ應用シテ二三ノ定理ヲ証明シタイ。

先ヅ近着ノ Bulletin American M.S. ニ Pettis ガ次ノ定理ヲ豫告シテイル。[4] コノ簡単ナ証明ガ得ラレタノデ先ヅ之ヲ述ベテ見タイ。

$\boxed{\text{定理 1}}$ 任意ノ空間 T ニ於テ $\mathfrak{E}$ ヲ T ヲモ元素ニ含ムヤウナ T ノ部分集合ノ Borel family トスル。$\alpha(E)$ ハ $\mathfrak{E}$ デノ nonnegative ナ completely additive set function デ $T=\sum_{i=1}^{\infty} T_i \ (\alpha(T_i)<\infty)$[5] トスル。$x(E)$ ハ $\mathfrak{E}$ ニ於テ定義サレ Banach 空間 X ノ値ヲトル函數トシ；且ツ次ノ條件ヲ滿足スルトスル。各 $f \in \bar{X}$ (X ノ conjugate space ヲ示ス) ニ對シ數値集合函數 $f(x(E))$ ガ completely additive デ $\alpha(E)=0$ ナラバ $f(x(E))=0$ トスル。

然ラバ $x(E)$ ハ completely additive デ且ツ如何ナル $\varepsilon>0$ ニ對シテモ $\alpha(E)<\delta$ ナラバ $\|x(E)\|<\varepsilon$ ナル様ナ δ ガ存在スル。

$\boxed{\text{証明}}$ $x(E)$ ノ completely additive ナルコトハ $\varphi(x(E))$ ($\varphi \in \bar{X}$) ガ completely additive ナルコトヨリ $\{E_i\}$ ヲ互ニ素ナ $\mathfrak{E}$ ノ元素ノ系列トスルト $\{x(E_i)\}$ ハ unconditionally convergent デ

---

4) B.A.M.S. vol. 45-9 (1939), p.677.

5) 此ノ假定ハ次ノ証明デワカル様ニ不要ノ様ニ思ヘル。

$\sum x(E_i) = x(\sum E_i)$ トナル。[6]

次ニ $x(E)$ ノ absolutely continous ナルコトヲ証明スル。今假リニ $X(E)$ ガ absolutely continuous デナイト假定スルト或 $\varepsilon_0 > 0$ ガ存在シテ meas $(E_\nu) \to 0$ ナル $\{E_\nu\}$ ガ存在シテ

$$\| x(E_\nu) \| \geqq \varepsilon_0 \qquad \nu = 1, 2, \cdots\cdots.$$

此ノ $\{E_\nu\}$ ハ互ニ素ト考ヘテ良イ。又 meas $(\sum E_\nu) = \sum$ meas $(E_\nu) < \infty$ ト考ヘテ差支ヘナイ。此ノ E_ν 全体ヲ一ツノ空間ト考ヘテ此ノスベテノ E_ν ヲ含ムヤウナ最小ノ Borel family ハ $\sum E_{\nu_i}$ ヲ元素トスルコトハ明ラカデアル。此処ニ $\{\nu_i\}$ ハ有限又ハ可附番無限個ノ任意ノ $\{\nu\}$ ノ部分系列デアル。

此ノ Borel family ヲ Z デ表ハスコトニスル。次ニ $Z \ni E_\nu$ ニ對シ $x(E_\nu)$ ノ張ル linear closed manifold ヲ考ヘルト此レハ separable[7] トナル。此ノ Manifold ヲ γ トスル。

依ツテ $\limsup_n | \varphi_n x(E) | = \| x(E) \| \ (E \in Z)$ ガ成立スルヤウナ $\overline{X}$ ノ元素ノ系列 $\{\varphi_n\}$ $(\|\varphi_n\| \leqq 1)$ ガ存在スル。次ニ $\varepsilon > 0$ ヲ任意ニ與ヘ δ ヲ適當ニ取リ

---

6) B. J. Pettis: Integration in vector spaces, Tr. A. M. S. 42 (1938) P. 277−304, Theorem 2.32.

(7) 以上ノ technique ヲ角谷サンニ教ヘテ頂キマシタ。

meas $(S) < \delta$. $(S \in Z)$ ニツイテ $|\varphi_i x(S)| < \varepsilon$ ($\|\varphi_i\| \leqq 1$) ガ φ_i ニ関シテ uniformly ニ成立スルコトヲ示ス。

今此レガ成立シナイトスルト $\{\varphi_{\nu_i}\}$ ($\|\varphi_{\nu_i}\| \leqq 1$) ナル subsequence ト $(S_{\nu_i}) \longrightarrow 0$ ナル $\{S_{\nu_i}\}$ ガ存在シテスベテノ ν_i ニツイテ

$$|\varphi_{\nu_i} x(S_{\nu_i})| \geqq \varepsilon \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

トナル。

然ルニ Y ハ separable ナル故ニ $\{\varphi_{\nu_i}\}$ ノ部分系列 $\{\varphi'_{\nu_i}\}$ ガ存在シテ任意ノ $Z \ni E$ ニツイテ $\varphi'_{\nu_i} x(E)$ ガ $\nu_i \longrightarrow \infty$ ナルトキ収斂スル。[8] 故ニ vitali-Hahn-Saks ノ定理ヨリ $\varphi'_{\nu_i} x(E)$ ハ equi-absolutely continuous トナリ (A) ト矛盾スル。故ニ $\varepsilon > 0$ ヲ任意ニ取ルモ δ ヲ適當ニ取リ meas $(S) < \delta$ $(S \in Z)$ ナラバ

$$\|x(S)\| < \varepsilon$$

トナリ最初ノ假定ト矛盾スルコトトナル。依ッテ $\varepsilon > 0$ ヲ任意ニ與ヘルモ meas $(E) < \delta$ $(E \in \mathfrak{Z})$ ナラバ

$$\|x(E)\| < \varepsilon$$

ナル様ナ δ ガ存在スル。 —— 以上 ——

コウシテミルト $T = \sum T_i$ ($\alpha(T_i) < +\infty$) ナル條件ハ不要ノ様ニ思ハレル。

---

8) S. Banach: Théorie des opérations linéaires P. 123.

次ニ S. Banach ノ opérations linéaires ノ本ニ載ツテイル L ノ weakly complete ナルコトノ証明[9]ハ Lebesgue ノ定理ヲ使ツテイルガ Lebesgue ノ定理ヨリ Vitali-Hahn-Saks ノ定理ヲ使フ方ガワカリヨイ。即チ $\overline{L}=M \ni f$ ニ対シ $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ $(x_n \in L)$ ガ存在スル故ニ Banach ノ定理[10]ヨリ $\int_0^1 |x_n(t)|\,dt < C$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ ナル常数 C ガ存在スル。

次ニ假定ヨリ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t)\,\alpha(t)\,dt$ $(\alpha(t) \in M)$ ノ存在スルコトカラ特ニ任意ノ可測集合 E ニツイテ $\lim_{n\to\infty} \int_E x_n\,dt$ ガ存在スル。ヨツテ Vitali-Hahn-Saks ノ定理ヨリ $F_n(E)=\int_E x_n(t)\,dt$ ハ equi absolutely continuous デアルカラ此ノ limit function $\lim_{n\to\infty} F_n(E)=F(E)$ モ亦 absolutely continuous デ completely additive トナリ

$$F(S)=\int_S F'(t)\,dt$$

トナル。コレヨリ $\{x_n(t)\}$ ハ $F'(t)$ ニ weakly converg スルコトガワカル。[11]

最後ニ Bochner-Taylor ノ $L(X)$ ノ weakly

---

9) S. Banach: loc. cit. P. 141-142.

10) S. Banach: loc. cit P. 80.

11) S. Banach: loc. cit P. 136

complete ノ証明[12]ニ於テモ Vitali-Hahn-Saks ノ定理ヲ使フト証明ガ直接トナリ、分リ易クナル。$L(X)$ トハ Bochner ノ意味デ可測デ各 t ニツキソノ値ガ Banach space X ニ属シ且ツ $\int_0^1 \| f(t) \| dt < \infty$ ナル函数 $f(t)$ ノ作ル space デ為シ $\| f \| = \int_0^1 \| f(t) \| dt$ デ f ノ norm ヲ定義スレバ $L(X)$ ハ Banach space トナル。又 $L(X)$ デ定義サレタ linear functional U ハ次ノ様ニ表ハサル。

$$U(t) = \int_0^1 \varphi(t) f(t)\, dt$$

此処ニ $\| U \| = \operatorname*{ess.sup}_{0 \leq t \leq 1} \| \varphi(t) \|$ ニシテ $\varphi(t)$ ハ Bochner ノ意味デ可測デソノ値ガ $\overline{X}$ ニ属シ $\operatorname*{ess.sup}_{0 \leq t \leq 1} | \varphi(t) |$ デ norm ヲ定義スルト此ノ空間ハ Banach space トナル、此レヲ $M(\overline{X})$ ト書ク。$\{ f_n \}$ ヲ $L(X)$ ノ elements ノ系列トシ $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \varphi(t) f_n(t)\, dt$ ガ如何ナル $\varphi(t) \in M(\overline{X})$ ニ対シテモ存在スルモノト假定スル。コノ特殊ノ case トシテ如何ナル $\varphi \in \overline{X}$ ト任意ノ可測集合 E ニツイテ

$$\lim_{n \to \infty} \int_E \varphi f_n(t) dt = \lim_{n \to \infty} \varphi \int_E f_n(t)\, dt$$

---

12) Bochner-Taylor: linear functionals on certain spaces of abstractly-valued functions, Ann. Math. 39-4 (1938) P. 913-944 Theorie 5.2.

ガ云ヘル。依リテ Vitali-Hahn Saks ノ定理ヨリ

$$\varphi F_n(E) = \varphi \int_E f_n(t)\,dt = \int_E \varphi f_n(t)\,dt$$

$$n = 1, 2, \cdots\cdots$$

ハ φ ヲ固定シテ equi-absolutely continuous デアル。X ガ weakly complete ナル故ハ

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi f_n(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \varphi \int_E f_n(t)\,dt = \varphi F(E)$$

ナル limit function $F(E)$ ガ存在シテ各集合 E ニツキソノ値ガ X ニ属ス集合函数デアリ、且ツ $\varphi F(E)$ ハ completely additive デ且ツ absolutely continuous デアルカラ定理 1 ヨリ $F(E)$ ハ completely additive デ absolutely continuous デアル。更ニ X ガ locally weakly compact ナラバ Pettis ノ微分ノ定理[13] ヨリ $F(E)$ ハ微分可能デ absolutely continuous ナルコトヨリ

$$F(E) = \int_E F'(t)\,dt \qquad (F'(t) \in L(X))$$

ガ成立シ結局

$$\int_E \varphi f_n(t)\,dt \longrightarrow \int_E \varphi F'(t)\,dt$$

---

13) Pettis: Differentiation in Banach spaces, Duke Math. 5-2 P. 254-268.

マタ弱收斂ト云フコトカラ，Banach ノ定理ニヨリ

$$\|f_n\|=\int_0^1\|f_n(t)\|\,dt<M\quad(M\text{ ハ常數})$$

$$n=1,2,\cdots\cdots$$

然シテ step function ハ $M(\overline{X})$ デ everywhere dense ナル故ニ近似スルコトが出來テ任意ノ $\varphi(t)\in M(\overline{X})$ ニツキ

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\varphi(t)f_n(t)\,dt=\int_0^1\varphi(t)F'(t)\,dt$$

が成立スル．依ツテ

$\boxed{\text{定理 2}}$　X が locally weakly compact ナ Banach space ナルトキ $L(X)$ ハ weakly complete デアル。[14)]

---

14) Bochner-Taylor ハ X が regular デ X, $\overline{X}$ が condition D ヲ滿足スルト云フ假定デ $L(X)$ ノ weakly complete ヲ證明シテイル。