# 826. Lie群論ヘノ注意

河田　敬義（東大）

ヨク知ラレテヰル事カモ知レマセンガ，Lie群論ニ就イテ氣附イタコトヲ二，三述ベサセテイタゞキ度イト思ヒマス。

## 1

Lie 群芽ト其ノ infinitesimale Transformation ノ作ル Lie Ring トノ間ノ関係ヲ Weyl ハ次ノヤウニ述ベテヰル。

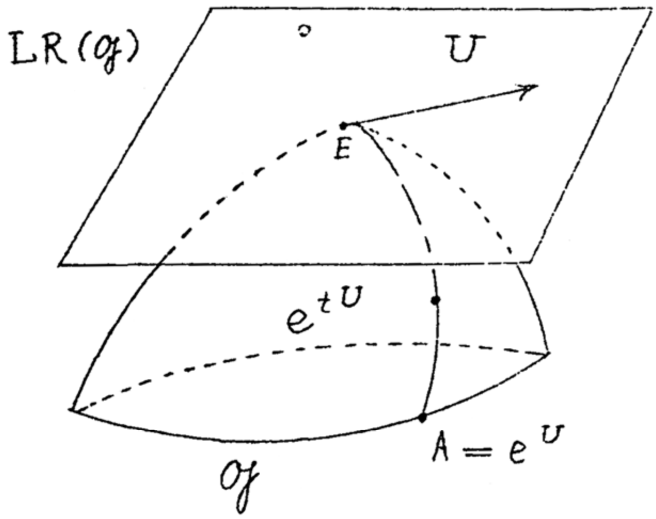
"The group germ is reducible to, and reproducible from, its infinitesimal elements, which not only form a linear set, the tangent plane of the group $\gamma$ at the origin 1, but even a kind of algebra. (The classical groups, p. 260) Lie Ring L.R ($\mathfrak{G}$) ヲ Lie 群芽 $\mathfrak{G}$ ノ $I$ ニ於ケル切平面ト見ルトイフコトハ，$\mathfrak{G}$ ガ Matrix ヨリナル時ニ J. v. Neumann (M. Z. 30) ニヨツテ述ベラレテアル。即チ複素數ヲ組成因子トスル $m$ 次ノ Matrix 全体ヲ $2m^2$ ノ Euclidischer Raum ト見テ（即チ $\|(a_{ij})\| = \sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}$ デ絶對値ヲ定メテ）$\mathfrak{G}$ ヲソノ中ノ $n$ 箇ノ Parameter ヲモツ曲面ト見テ $\mathfrak{G}$ ノ上ノ点列 $\{A_\nu\}$ ($A_\nu \to E$) カラ

$$\frac{A_r - E}{\varepsilon_r} \longrightarrow U \qquad (r \to \infty)$$

ナル $U$ ガ存在スルトキニカヽル $U$ ノ全体ガ $LR(\mathfrak{G})$ ヲ作ル。又ハ $A \in \mathfrak{G}$ ガ充分 $E$ ニ近イトキニ $U = \log A$ ノ張ル平面ト云ッテモヨイ。

之レカラ逆ニ $A \in \mathfrak{G}$ ガ $E$ ニ近ケレバ $A = e^U$ トナルト言フノデアル。

例ヘバ $\mathfrak{G}$ ガ $|A| = 1$ ノ全体トスレバ $U = \log A$ ハ $|A| = e^{SpU}$ カラ $LR(\mathfrak{G})$ ハ $SpU = 0$ ナル $U$ ノ全体トナル。$E + U$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ $E$ ニ於ケル切平面ナルコトハ $\mathfrak{G}$ ハ代數曲面デスラアルカラ




$\mathfrak{G}$ ニ於ケル $E$ ノ近クノ matrix ヲ $E + \varepsilon U$ トスレバ

$$|E + \varepsilon U| = 1 + \varepsilon S_p U + o(\varepsilon)$$

カラ $S_p U = 0$ デ定メラレルコトガワカル。

然シ $\mathfrak{G}$ ガ matrix ヨリナラナイ時ハ如何ニシテ此レト同様ナ直觀的ナ像ヲ作ルコトガ出来ルカ。又ソレガ今ノ場合ト如何ニ関係附ケルコトガ出来ルカトイフコトヲ考ヘタイト思ヒマス。

## 2

三村氏ノ「連続群論」(M) カラ必要ナ定義ヤ結果ヲ書

キ拔キマスト

Lie 群トハ一ツノ群デ單位元エノ充分近クハ $n$ 次 Euclid 空間ノ球ト同位相デアリ、ソノ元ハ $E_a$ ($a=(a_1, \cdots\cdots a_n)$) デアラハサレル。

$E_a \cdot E_b = E_c$ トスレバ $c_i = \varphi_i(a_1, \cdots\cdots, a_n, b_1, \cdots\cdots, b_n)$, $E_b = E_a^{-1}$ トスレバ $b_i = \psi_i(a_1, \cdots\cdots, a_n)$ デ, $\varphi_i, \psi_i$ $(i=1, \cdots\cdots, n)$ ガ原點ノ近傍デスベテノ文字ニツイテ正則解析函數トナルモノトスル。

本質的ナ Lie 變換群トハ、$m$ 次空間ノ一點 $x^0=(x^0_1, \cdots\cdots, x^0_m)$ ノ近傍デ定義サレタ變換ノ集合デ一ツノ $n$ 次 Lie 群ト同型ナモノトスル。且ツ $E_a$ ニ對スル變換ヲ

$$T_a:\ x'_i = f_i(x_1, \cdots\cdots, x_m;\ a_1, \cdots\cdots, a_n)$$
$$(i=1, \cdots\cdots, m)$$

トスル時 $f_i$ ガスベテノ $x_j, a_k$ ニツイテ正則解析函數ナルモノトスル。(M. P. 84)

今

$$(1)\quad \left[\frac{\partial f_i(x,a)}{\partial a_k}\right]_{a=0} = \xi_{ik}(x),\quad \left[\frac{\partial \varphi_i(a,b)}{\partial b_k}\right]_{b=0} = \alpha_{ik}(a)$$

トスレバ infinitesimale Transformation ハ演算子

$$(2)\quad X_i = \sum_{k=1}^{m} \xi_{ki}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\quad (i=1, \cdots\cdots, n)$$

ノ一次結合 $X=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i X_i$ ($\lambda_i$ ハ實數) ノ全体デアル.

コノトキ

(3) $[X_i, X_j] = X_iX_j - X_jX_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk} X_k$ ナル常數

$c_{ijk}$ ガ存在スル。(M. p. 110)

即チ X ノ全体ガ Lie Ring $L\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ヲ作ル。

X ト $T_a$ トノ関係

$$\frac{da_k}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_{kj}(a) \quad (k=1, \cdots\cdots, n)$$

ヲ $t=0$ ナラ $a=0$ ナル初期條件デトイテ $a_k = h_k(\lambda_1 t, \cdots \cdots, \lambda_n t)$ トナル。

λ ノ充分小サイ所ト a ノ充分小サイ処トヲ $a_k = h_k(\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n)$ ナル正則ナ一對一ノ変換デ對應ツケテ

$T_a$ : $x'_i = f_i(x, a) = f_i(x, a(\lambda)) = \bar{f}_i(x, \lambda)$

$= T_\lambda x_i$ トカキ λ ヲ標準母數トイフ。 (M. p. 113)

$x'_i(t) = \bar{f}_i(x, \lambda t)$ トスレバ

$$\frac{dx'_i}{dt} = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k\right) x'_i$$ トナル。 $X = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k$

トオケバ，一般ニ $x'_1 \cdots\cdots x'_m$ ノ正則解析函數 $F(x'_1 \cdots\cdots x'_m)$

ハ又

(4) $\frac{dF}{dt} = XF$ ヲ満足シ，従ツテ

$$F(x'_1 \cdots\cdots x'_m) = F(x_1 \cdots\cdots x_m) + \frac{t}{1} XF(x_1 \cdots\cdots x_m) + \cdots\cdots + \frac{t^n}{n!} X^n F(x_1 \cdots\cdots x_m) + \cdots\cdots$$

ト原点ノ近クデ一様收斂スル Taylor 展開ガ出来ル。

(5) $e^{tX} = 1 + tX + \cdots\cdots + \frac{t^n}{n!}X^n + \cdots\cdots$

トカケバ

$$F(x'_1 \cdots\cdots x'_m) = e^{tX}F$$

トアラハサレル。(M. p. 93)

以上ノ結果ヲ使ッテ Lie 群 $\mathfrak{G}$ ヲ曲面トシテ含ム様ナ空間 $\mathfrak{R}$ ヲ次ノ様ニ定義シマス。

$x^0 = (x^0_1, \cdots\cdots, x^0_m)$ ノ近傍ヲ $\mathfrak{O}$ トシテ，$\mathfrak{O}$ ニ於ケル $x^0$ デ正則ナ解析函數ノ全体ヲ $A(\mathfrak{O})$ トスル。$A(\mathfrak{O})$ ノ in $A(\mathfrak{O})$ ノ lineare Transformation $L$ ノ全体ヲ $\mathfrak{R}$ トスル。

$L_1 F(x_1 \cdots\cdots x_m) = F_1(x_1 \cdots\cdots x_m)$，$L_2 F = F_2$ ナル時 $(L_1 + L_2)F = L_1 F + L_2 F$，$(L_1 L_2)F = L_1(L_2 F)$ トスレバ $\mathfrak{R}$ ハ Ring トナル。

又 $L_n \longrightarrow L \ (n \to \infty)$ トハ

スベテノ $F \in A(\mathfrak{O})$ ニ對シテ $L_n F \xrightarrow[gl]{} LF$（$x^0$ ノアル近傍デ gleichmäßig ニ收斂スルコト）ト定義スレバ $\mathfrak{R}$ ニ Topologie ヲ入レルコトが出来ル。

次ニ $\mathfrak{G}$ ヲ $T_a$ : $x'_i = f_i(x_1, \cdots\cdots, x_n; a_1, \cdots\cdots, a_n)$ ニ對シテ

$$L_a F(x_1 \cdots\cdots x_m) = F(x'_1 \cdots\cdots x'_m)$$

$$= F(f_1(x_1 \cdots x_m, a_1 \cdots\cdots a_n), \cdots\cdots, f_m(x_1 \cdots\cdots x_m, a_1 \cdots\cdots a_n))$$

ト定義スレバ $a$ が $0$ ニ充分近イ時ハ $x'_i$ ト $x_i$ トハ余リチガハナイカラ，$x$ ガ $x^0$ ノ充分近クナラバ右辺ハ意味ヲモツ。

Fハ解析函數ナル故$x^0$ノ如何ニ小ナル近傍ニヨッテモ決定サレルカラ$L_a$ハハッキリトシタ意味ヲモツ。明カニ$L_a$ハlineare Transformationデアル。

$\mathfrak{G}$ノ定義カラ$T_aT_b=T_c$ナラ$L_aL_b=L_c$、又逆モ明カデアル。

次ニ$a_i^{(r)}\to a_i\ (r\to\infty)\ (i=1,\cdots,n)$ナラバ$f_i(x,a^{(r)})\to f_i(x,a)$カラ直チニ$L_{a^{(r)}}\to L_a$ナルコトガワカル。

即チ$L_a$ノ全体ハ$\mathfrak{G}$トisomorphニナリ、$\mathfrak{R}$ノ中ノ一ツノn-parametrigナ曲面ヲ表ハス。ソレヲ$\overline{\mathfrak{G}}$デアラハス。

(5)式$e^{tX_0}$ハ今定義シタ收斂デ意味ヲ持ツ。又

$$X=\lim_{t\to 0}\frac{e^{tX}-I}{t}$$ モ同様.

サテ$\overline{\mathfrak{G}}$ノ$I: x_i'=x_i$ニ於ケル切平面ノ定義トシテハNeumannト全様ニ$a(r)=(a_1(r),\cdots\cdots,a(r)_n\xrightarrow{(r\to\infty)}(0,\cdots\cdots,0)$ナル点列ヲトリ実数列$\varepsilon(r)$ヲ適當ニ取ッタトキニ

$$\lim_{r\to\infty}\frac{L_{a(r)}-I}{\varepsilon(r)}=U$$

ガ存在スレバ，カゝルUノ全体ハ一ツノn-dimナlinearer Raum $LR(\overline{\mathfrak{G}})$ヲ作ルコトガ証明サレゝバ、之レヲ以テIニ於ケル切平面ト言ッテヨイデアラウ。

次ニ$LR(\mathfrak{G})$ガ$\sum_{i=1}^{n}\lambda_k X_k$ノ全体トナルコトヲ証明ス

ル。

コレガ丁度 $n$-dim ナルコトハ M. 114頁参照。

先ヅ標準母數 $(\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_n)$ = 母數ヲカヘテモ $a \to 0$. ト $\lambda \to 0$ トハ同一ナル故差支ヘナイ。

既ニ $L_{\lambda(t)} = e^{tX}$ ナルトキハ $t = \frac{1}{r}$ トスレバ

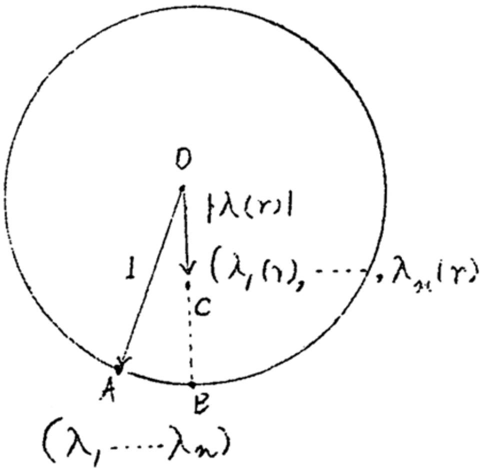
$$\frac{L_{\lambda(r)} - I}{\frac{1}{r}} \longrightarrow X$$

ナルコトヲ知ッテヰル。今 $\{\lambda(r)\}$ ノ中カラ

$|\lambda(r)| = \sqrt{\lambda_1(r)^2 + \cdots\cdots + \lambda_n(r)^2}$ トシテ $\left(\frac{\lambda_1(r)}{|\lambda(r)|}, \cdots\cdots, \frac{\lambda_n(r)}{|\lambda(r)|}\right)$

ノ收斂スル部分列ヲトル。ソレヲ又 $\lambda(r)$ ト番号ヲツケヤウ。
且ツソノ極限ヲ $(\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n)$ $(\lambda_1^2 + \cdots\cdots + \lambda_n^2 = 1)$ トスル。コヽデ

$X = \sum \lambda_k X_k$ トスレバ




$$\text{(6)} \quad \frac{L_{\lambda(r)} - I}{|\lambda(r)|} \longrightarrow X \ (r \to \infty)$$

ヲ証明スレバ，求ムル証明ハ之レカラ容易ニワカルコトデアル。
標準母數ノ定義カラ

$$L_{\lambda(r)} = e^{|\lambda(r)| X(r)},$$

$$X(r) = \sum_k \frac{\lambda_k(r)}{|\lambda(r)|} X_k$$

トアラハサレル。

故ニ

$$\frac{L_{\lambda(r)}-I}{|\lambda(r)|}=\frac{1}{|\lambda(r)|}\left(e^{|\lambda(r)|X}-I\right)+\frac{1}{|\lambda(r)|}\left(e^{|\lambda(r)|X(r)}-e^{|\lambda(r)|X}\right)$$

カラ

$$P_r=\frac{1}{|\lambda(r)|}\left(e^{|\lambda(r)|X}-e^{|\lambda(r)|X(r)}\right)$$

$$=e^{|\lambda(r)|X}\left\{\frac{1-e^{|\lambda(r)|(X(r)-X)}}{|\lambda(r)|}-\frac{e^{-|\lambda(r)|X}e^{|\lambda(r)|X(r)}-e^{|\lambda(r)|(X(r)-X)}}{|\lambda(r)|}\right\}$$

$\longrightarrow 0$ ヲ言ヘバヨイ。$\{\ \ \}$ 内ノ第二ノ項ハ $\longrightarrow 0$ ナルコトハ M. p. 166 頁参照。

同様ニ第一項モ $X(r)-X\longrightarrow 0$ カラ展開シテミレバワカル。故ニ $L_r=e^{|\lambda(r)|X}$ トスレバ。

$F_r(x)\xrightarrow[\mathfrak{g}]{}0\ (x\in\mathfrak{O})$ カラ $L_rF_r(x)\longrightarrow 0\ (x\in\mathfrak{O}_0)$ ヲイヘバヨイ。

今 $\mathfrak{O}\ni\mathfrak{O}_1=(x;|x_i|<\delta)$ トスレバ $r>r_0$ ナラ $|F_r(x)|<\varepsilon,\ x\in\mathfrak{O}_1$. $\overline{\mathfrak{g}}\ni L_r\longrightarrow 0$ カラ $x\in\mathfrak{O}_0$ ナラ $|L_rx_i|<\delta\ (i=1,\cdots\cdots,n)$ ナル $\mathfrak{O}_0$ ガアル。即チ

$$|L_rF_r(x)|=|F_r(L_rx)|<\varepsilon\quad(x\in\mathfrak{O}_0)$$

トナル。Q. E. D.

以上ノ証明ヨリ特ニ $\{a(t)\}=\{\lambda(t)\}$ ガ $(a(0)=\lambda(0)=0)$ $0\leqq t\leqq 1$ デ原点マデ滑ラカニ切線方向ノカハル曲線トスレバ、(Parameter Raum ニ於ケル)

$$\frac{L_{a(t)}-I}{\varepsilon(t)}\longrightarrow X(\neq 0)\in LR(\overline{\mathfrak{g}})$$

ナル $\varepsilon(t)$ ノ存在スルコトガワカル。

又 M. p. 166 カラ

$$\lim_{t=0} \frac{e^{-Yt}e^{-Xt}e^{Yt}e^{Xt}-I}{t^2} = XY-YX$$

カラ

$X, Y \in LR(\bar{\mathfrak{g}})$ カラ $XY-YX=[X,Y] \in LR(\bar{\mathfrak{g}})$ ガ言ハレル。

即チ (3) ガ新タニ証明サレタコトニナル。

以上デ Neumann ノ論法ガ一般ノ場合マデ擴張サレタ。

# 3

次ニ2ニ於ケルコトト Neumann ノ場合トノ直接的関係ヲシラベテミル。

2デ考ヘタ $\mathfrak{g}$ ヲ einbetten スル $\mathfrak{R}$ ハ餘リ廣スギルカラ、Ring トイフコトハ保タレナイガ、モット セマイ空間ヲ考ヘル。

$\mathfrak{R}$ ヲ $L$ デ

$$Lx_i = 0 \quad (i=1, \cdots\cdots, n)$$

ノ全体ハ $\mathfrak{R}$ ニ於ケル abgeschlossener Modul $\mathfrak{N}$ ヲ作ル。$Lx_i=0$ カラ $L'Lx_i=0$ カラ $\mathfrak{N}$ ハ Linksideal トナルガ Zweiseitiges Ideal トハナラナイ。シカシ

$$\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}/\mathfrak{N}$$

ナル Modul ヲ考ヘテ、Topologie トシテ（一ヲ mod $\mathfrak{N}$ ノ Klasse トスル）

$\bar{L}_n \longrightarrow \bar{L}$ トハ任意ノ代表 $L_n, L \in \mathfrak{R}$ ヲトリ

$$L_n x_i \longrightarrow L x_i \quad (i=1,\dots\dots,n)$$

トスル。コレハ勿論代表ノ取リ方ニ関係シナイ。$\mathfrak{R} \to \overline{\mathfrak{R}}$ハ明カニ連続ナ對應デアル。

$\mathfrak{R}$ニ於ケルト同様ニ $\overline{L}_a$ハ$\mathfrak{g}$トisomorphナn-parametrigナ曲面$\overline{\mathfrak{g}}$トナル。

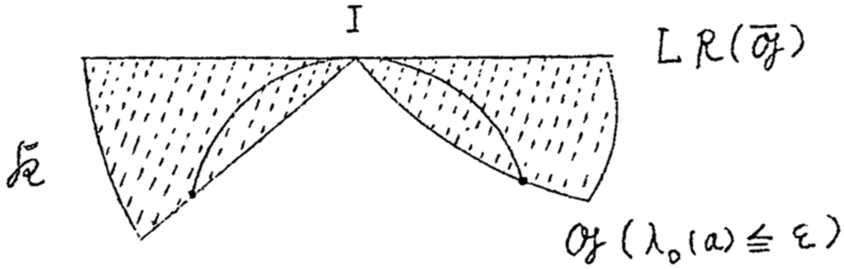
即チ $L_a \longleftrightarrow \overline{L}_a$ ハ明カニ1:1ノ對應デアル。

$LR(\mathfrak{g})$モ同様ニ1:1ニ$\overline{LR(\overline{\mathfrak{g}})}$トシテeinbettenサレル。

$\overline{\overline{\mathfrak{g}}}$ノ$\overline{I}$ニ於ケル切平面トシテ$\overline{LR(\overline{\mathfrak{g}})}$ガ定メラレルコトハ

$\mathfrak{R}$ニ於イテ$\{c(I-L_a),\ LR(\overline{\mathfrak{g}})\}$ノ全体ノ作ル錐体$\mathfrak{K}$ト$\overline{\mathfrak{R}}$ニ於テ$\{c(\overline{I}-\overline{L_a}),\ \overline{LR(\overline{\mathfrak{g}})}\}$ノ全体ノ作ル錐体$\overline{\mathfrak{K}}$トガhomöomorphナルコトヲ言ヘバヨイ。ソレニハ$\mathfrak{K}\to\overline{\mathfrak{K}}$ガ1:1ノstetigナル故$\mathfrak{K}$ノ$I$ノ近傍$\overline{\mathfrak{U}(\varepsilon, N)}$

$$c_a(L_a-I),\ \left(L_a=e^X,\ X=\sum\lambda_k X_k \,\middle|\, \lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2 = \lambda_0^{(a)},\ \ \lambda_0\leqq\varepsilon,\ \ 0\leqq c_a<N\frac{1}{\lambda_0(a)}\right)$$




及ビ $X=\sum\lambda_k X_k\ (\lambda_0=\sqrt{\lambda_1^2+\cdots\cdots+\lambda_n^2},\ 0\leqq\lambda_0\leqq N)$ ハ$\varepsilon$ガ小ナル時ハNガ何デモkompactニナルコトガワカ

レバ，ソレカラ $\mathfrak{K}$ ト $\overline{\mathfrak{K}}$ トノ homöomorph ナルコトガ言ヘル。シカル＝ $\mathfrak{L}R(\overline{\mathfrak{g}}) \frown \overline{\mathfrak{U}(\varepsilon, N)}$ ノ kompact ナルハ當然。又

$E_r = c_{a(r)}\,(\mathfrak{L}_{a(r)} - I)$ $(r = 1, 2, \cdots\cdots)$ ガ與ヘラレル時ハ

$(\lambda_1(a(r)), \cdots\cdots, \lambda_n(a(r)))$ ノ收斂スル部分列ヲトリ、又 $\mathfrak{L}_{a(r)}$ トスレバ

$$\frac{\mathfrak{L}_{a(r)} - I}{\lambda_0(a)} \longrightarrow X \in \mathfrak{L}R(\overline{\mathfrak{g}})$$

トナルコトカラ，$\overline{\mathfrak{U}(\varepsilon, N)}$ ガ kompact ナルコトガ容易＝結論サレル。

故＝ $\mathfrak{K}, \overline{\mathfrak{K}}$ ＝關スル限リデハ Topologie ＝変化ノナイコトカラ $\overline{\mathfrak{L}R(\overline{\mathfrak{g}})}$ ガ $\overline{\mathfrak{g}}$ ノ切平面ナリトイフコトガ $\overline{\mathfrak{K}}$ デ $\mathfrak{K}$ 同樣＝成立スル。

サテ一次変換 $A = (a_{ij})$ ハ $\mathfrak{R}$ ＝於テ

$$\left.\begin{aligned} M_A F(x_1 \cdots\cdots x_m) &= F(x'_1, \cdots\cdots, x'_m), \\ x'_i &= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_j \end{aligned}\right\} \text{トアラハ}$$

サレ，コノ全体ヲ $\mathfrak{M}$ トスルト，$\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}^{\smile}\mathfrak{R}/\mathfrak{R}$ ハ $\mathfrak{M}$ ト isomorph トナル。

且ツ $\|A\| = \|(a_{ij})\| = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ ＝ヨル一次変換ノ Topologie ト、上＝與ヘタ $\overline{\mathfrak{M}}$ 又ハ $\mathfrak{M}$ ノ Topologie トハ全然一致スル。

$\mathfrak{g}$ ガ一次変換ヨリナル Lie 群ノ時＝ハ $\overline{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{M}$.

$\bar{\bar{\mathfrak{g}}} \subset \bar{\mathfrak{M}} \subset \bar{\mathfrak{N}}$ トナル。ソレヲ

$$L_a:\ x_i' = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(a_1, \ldots\ldots, a_n)\, x_j.\quad (\alpha_{ij}\text{ ハ } x \text{ ヲ含}$$

マナイ）トスルト

$$\alpha_{ij}^{(k)} = \left(\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial a_k}\right)_{a=0} \text{ トスレバ}$$

$$\xi_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial a_j}\right)_{a=0} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}^{(j)} x_k \text{ ナル故}$$

$$X = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}^{(k)} x_j\right) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\therefore\ X x_l = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_{lj}^{(k)}\right) x_j \text{ トナル。}$$

$$\therefore\ \bar{\alpha}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_{ij}^{(k)},\quad \bar{A} = (\bar{\alpha}_{ij}) \text{ トスレバ}$$

$$X x_i = \bar{A} x_i \text{ トナル。}$$

故ニ又 $\overline{LR(\mathfrak{g})} \subset \mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}/\mathfrak{N} = \bar{\mathfrak{M}}$ トナル。

然ルニ $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N} = M_A + L$；$\mathfrak{M} \ni M_A$, $\mathfrak{N} \ni L$ ノ全体ハ Ring トナリ、$\mathfrak{N}$ ガソノ Zweiseitiges Ideal トナリ

$$\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cong \bar{\mathfrak{M}}$$

ハ Ring isomorph トナルコトガイヘル。

ソレニハ $M_A L \in \mathfrak{N}$ ハ明カナル故 $L M_A \in \mathfrak{N}$ ヲイヘバヨイ。

ソレハ $L x_i = 0\ (i = 1, \ldots\ldots, n)$ カラ

$$L M_A x_i = L\left(\sum_j a_{ij} x_j\right) = \sum_j a_{ij}\, L x_j = 0$$

カラワカル。

以上ヨリ

$$\mathfrak{R} \to \overline{\mathfrak{R}} \supset \overline{\overline{\mathfrak{R}}} \to \text{Matrizenring}$$

ナル對應デ, $\mathfrak{O}$ ト $L\mathfrak{R}(\mathfrak{O})$ トヲ考ヘルカギリ、ソノRing operation モ Topologie モ全然保タレテヰルコトガワカッタ。故ニ2ノ証明ハソノユノ operator ノ算法ハ Matrix ノ算法ニ, Top. ハ $\|A\| = \sqrt{\sum |a_{ij}|^2}$ ニヨル Matrix ノ Top. デオキカヘルコトガ出来ルワケデアル。之レガ Neumann ノ理論デアル。——