825. V. Šmulian: Banach空間ノ principle of inclusion ニ就テ, II

樋口 順四郎(阪大)

III. 前号デハ共軛空間 $\bar{E}$ ハ全然考ヘニ入レナカッタ.

以下デハ空間 $\bar{E}$ ヲ考ヘル. $G \subset \bar{E}$ ヲ任意ノ集合トス

ルトキ，$G$ ト $G$ ノ element ノスベテノ transfinite sequence ノ transfinite limit[9] ノ和集合ヲ $G_1$ ト書キ，$G_1$ ヲ含ム最小ノ convex closed set ヲ $G_1^c$ デ表ハス．$\xi < \xi_0$ ニ対シテハスデニ $G_\xi$，$G_\xi^c$ ガ定義サレテオル時 $G_{\xi_0}$ ヲ次ノ様ニ定メル。

a) $\xi_0 - 1$ ガ存在スルナラ

$$G_{\xi_0} = \left(G_{\xi_0 - 1}^c\right)_1 ,$$

b) $\xi_0 - 1$ ガ存在シナケレバ

$$G_{\xi_0} = \sum_{\xi < \xi_0} G_\xi .$$

$G_{\xi_0}^c$ ハ $G_{\xi_0}$ ヲ含ム最小ノ convex closed set ト定義スル。コノトキ適當ナ $\vartheta$ ガ定マッテ $G_\vartheta^c$ ハ convex デ transfinitely closed ニナル事ハ明デアル。

$\boxed{\text{Lemma 5}}$ $f_\xi(x) \xrightarrow{\vartheta} f_0(x)$ トナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハスベテノ $f_\xi$ ヲ含ム任意ノ convex transfinitely closed set ガ $f_0$ ヲ含ムコトデアル。

證： 必要條件デアルコトハ明デアル。充分ナコトヲ

---

9) $f_0(x)$ ガ $\{f_\xi(x)\}_{\xi < \vartheta}$ ノ transf. limit デアルトキ

$f_\xi(x) \xrightarrow{\vartheta} f_0(x)$ ト書クコトニスル．コレハ任意ノ $x \in E$ ニツイテ $\underline{\lim}_{\xi \to \vartheta} f_\xi(x) \leq f_0(x) \leq \overline{\lim}_{\xi \to \vartheta} f_\xi(x)$ ガ成立スルコト。

証明スル。今 $\overline{\lim}\, f_\xi(x') < f_0(x')$ デアレバ $\xi \geq \xi_0$ ト充分ニ小サナ $\varepsilon_0$ ニ對シテ

$$f(x') \leq f_0(x') - \varepsilon_0, \quad f = f_\xi \quad (8)$$

ガ成立スル。G ヲ $\xi \geq \xi_0$ デアル $f_\xi$ ノ全体トシ，上述ノ convex transfinitely closed set $G^c_\vartheta$ ヲ作ル。(8) ハスベテノ $f \in G^c_\vartheta$ デ成立スル。シカルニ $f_0 \in G^c_\vartheta$ デアルカラ $f_0(x') \leq f_0(x') - \varepsilon_0$，之レハ矛盾デアル。

$\boxed{\text{Lemma 6}}$ $\{f_n\}$ ガ $f_0$ ニ弱收斂スルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ $\{f_n\}$ ノ殆ンドスベテヲ含ム functional トシテ weakly closed ナ convex set ガ $f_0$ ヲモ含ムコトデアル。

證： Lemma 5 ト同樣ニデキル。

$\boxed{\text{Lemma 7}}$ linear subspace $F \subset \overline{E}$ ノ unit sphere ガ $\vartheta$-closed[10] ナルタメニハ有界ナ convex; transfinitely closed set ノ任意ノ減少系列

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_\xi \supseteq \cdots\cdots, \quad K_\xi \cdot F \neq \Lambda \quad (1 \leq \xi < \vartheta)$$

ガ F ニ屬スル共通点ヲ持ツコトガ必要且ツ充分デアル。

證： Lemma 5 カラ容易ニ証明デキル。

linear subspace $F \subset \overline{E}$ ガ regularly closed ナタメニハ，F ノ unit sphere ガ transfinitely

---

10) $\mathfrak{M}$ ガ $\vartheta$-closed トハ $f_\xi(x) \xrightarrow{\vartheta} f_0(x)$，$f_\xi \in \mathfrak{M}$ ナラ $f_0 \in \mathfrak{M}$ トナルコト。

closed デアルコトガ必要且ツ充分デアルカラ, Lemma 7 カラ次ノ定理ヲ得ル。

$\boxed{\text{定理 6}}$ E ノ線状部分空間 F ガ regularly closed ナタメニハ有界ナ convex, transf. closed set ノ任意ノ減少系列。

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_\xi \supseteq \cdots\cdots,$$

$$K_\xi \cdot F \neq \Lambda \ (1 \leqq \xi < \vartheta, \ \vartheta \text{ ハ任意}) \cdots (9)$$

ガ F ニ属スル共通点ヲ持ツコトガ必要且ツ充分デアル。

定理 6 ヲ用ヒルト, 定理 5 ト同様ナ次ノ定理ガ証明サレル。

$\boxed{\text{定理 7}}$ E ノ線状部分空間 F ノ unit sphere ガ w-closed ト仮定スル. F ガ regularly closed ナタメニハ, E ノ Unit sphere $\|f\| \leqq 1$ 内ノ convex, transfinitely closed set ノ任意ノ減少系列 (9) (但シ $K_\xi \cdot F$ ハ $\|f\| = 1$ ノ表面ニアルトスル) ガ F ニ属スル共通点ヲ持ツコトガ必要且ツ充分デアル。

$\boxed{\text{注意}}$ F ノ Unit sphere ノ表面上ノ convex, w-closed set ガ separable ナラ定理ノ條件ヲ満足スル。依ツテ

$\boxed{\text{系}}$ F ノ unit sphere ノ表面上ノ convex closed set ガ separable ナラ, F ガ regularly closed ナタメニハ, ソノ unit sphere ガ w-closed ナコトガ必要且ツ充分デアル。

コノ定理カラ

$\boxed{\text{定理 8}}$ F ガ $\overline{E}$ ノ separable subspace ナラバ，F ガ regularly closed ナタメニハ有界ナ convex transfinitely closed set ノ denumerable sequence.

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_n \supseteq \cdots\cdots \quad K_n \cdot F \neq 0$$

ガ F ニ属スル共通点ヲ持ツコトガ必要且ツ充分デアル。

IV. $\boxed{\textit{Lemma 8}}$ H ヲ $\overline{E}$ ノ任意ノ separable subspace トスルト，separable subspace $G \subset E$ ヲ適當ニトレバ $H \subset \overline{G}$ トナル。

証： H デ dense ナ $\{f_n\}$ ヲ取ル．$f_n$ ニ對應シテ $\{x_n^{(k)}\}_{k=1,2,\cdots}$ ヲ次ノ如クニヤメル。

$$\|x_n^{(k)}\|=1, \quad \lim_{k\to\infty} f_n(x_n^{(k)})=\|f_n\|.$$

$\{x_n^{(k)}\}_{n,k=1,2,\cdots\cdots}$ ヲ含ム最小ノ linear closed set ヲ G トスル。G ハ E ノ separable subspace デ，H ニ属スル $f$ ハ勿論 G デモ定義サレテヰル。identically zero デハナク $\{x_n^{(k)}\}$ ト orthogonal ナ linear functional ヲ $f_0$ トスル（$f_0 \in \overline{G}$）。$f_0$ ヲ norm ヲ上ゲヌ様ニ E ヘ拡張シタモノヲ $F_0$ トスル $\|F_0\|_E = \|f_0\|_G \neq 0$.
明ラカニ $F_0 \overline{\in} H$。

$\boxed{\textit{Lemma 9}}$ $\mathfrak{M} \subset \overline{E}$ ヲ separable ナ有界集合トスル．$\{f_n\}_{n=1,2,\cdots\cdots}$ $(f_n \in \mathfrak{M})$ ニハ $f_n(x) \xrightarrow{\omega} f(x)$ トナル $f$. ガ對應シテヰル。スベテノ $\{f_n\}$ ニ對シテ出来ル $f$ ノ集合 H ガ separable ナラ $\mathfrak{M}$ ハ（functional ノ

弱収斂デ) weakly compact デアル。

証: $\mathfrak{M}+H$ ヲ含ム最小ノ closed linear set ヲ $E_1$ トスル。$E_1$ ハ $\bar{E}$ ノ separable subspace デアル。Lemma 9 ニヨリ separable subspace $G\subset E$ ヲトッテ $E_1\subset\bar{G}$ ナラシメル。$G$ デ dense ナ elements ヲ $\{x_n\}_{n=1,2,\cdots\cdots}$ トスル。$f\in E_1$ デ $f(x_n)=0$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ナラ $f=0$ デアルコトハ $G$ ノ作リ方カラ明デアル。

$\{f_n\}_{n=1,2,\cdots\cdots}$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ系列トセヨ。$\{f_n\}$ ハ $\lim_n f_n(x_\nu)$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ ガ存在スルモノト假定シテモヨイ(サウデナケレバ部分列ヲトル)。今スベテノ $x\in E$ デ $\lim_n f_n(x)$ ガ存在スルコトヲ証明シヨウ。モシ $x'\in E$ デ $\lim_n f_n(x')$ ガ存在シナイナラ二ツノ部分列 $\{f'_{n_i}\}$, $\{f''_{n_i}\}$ ガアッテ $x'$ デ各々異ナル極限ヲモツ。一方假定カラ $f', f''\in E_1$ ガ存在シテ

$$\underline{\lim}_{i\to\infty} f'_{n_i}(x)\leq f'(x)\leq \overline{\lim}_{i\to\infty} f'_{n_i}(x),$$

$$\underline{\lim}_{i\to\infty} f''_{n_i}(x)\leq f''(x)\leq \overline{\lim}_{i\to\infty} f''_{n_i}(x)$$

ガ任意ノ $x\in E$ デ成立スル。シカモ $x_\nu$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ デハ $\lim f'_{n_i}(x_\nu)=\lim f''_{n_i}(x_\nu)$。從ッテ $f'-f''=f$ ト書ケバ $f\in E_1$, $f(x_\nu)=0$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$. 故ニ identically ニ $f=0$. 之ハ $f(x')\neq 0$ ニ矛盾スル. 即チ $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ハ存在スル. コレハ $\mathfrak{M}$ ガ weakly compact ナコトニ外ナラヌ。

$\boxed{\text{定理 9}}$ $\mathfrak{M}$ ヲ $\overline{E}$ ノ (functional ノ弱收斂デ) weakly closed ナ separable set トスル。$\mathfrak{M}$ ガ (functioned ノ弱收斂デ) weakly compact ナタメニハ $K_n \cdot \mathfrak{M} \neq \Lambda$ デアル weakly closed convex set ノ任意ノ denumerable sequence

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_n \supseteq \cdots\cdots$$

ニ共通ナ $\mathfrak{M}$ ノ点ガ存在スルコトガ必要且ツ充分デアル。

証. Lemma 5, 9 カラ容易ニワカル。

次ニ Lemma 9 カラ直チニ分ル事実ヲ列擧シヨウ。

1°. $f_n \in \overline{E}$, $\|f_n\| \leqq 1$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ガ與ヘラレタ時, モシ

$$\varliminf_{n \to \infty} f_n(x) \leqq f(x) \leqq \varlimsup_{n \to \infty} f_n(x)$$

for all $x \in E$

トナル $f \in \overline{E}$ ノ集合ガ separable ナラ $\{f_n\}$ ハ weakly compact デアル (functional ノ弱收斂ノ意味デ)。

2°. $x_0 \in E$ $\|x_0\| = 1$ ガ與ヘラレタトスル。$x_0$ ニ於ケル unit sphere $\|x\| \leqq 1$ ノ Stützhyperebene ヲ $f(x) = 1$ トスルモシ $\{f\} \in \overline{E}$ ガ separable デ $f_n(x_0) \to 1$ (但シ $\|f_n\| \leqq 1$) ナラ $\{f_n\}$ ハ weakly compact デアル。

$\mathfrak{M} < E$ ノ任意ノ sequence $\{x_n\}$ カラ適當ニ部分

列 $\{x_{n_i}\}$ ヲ選ビ出セバ，スベテノ $f \in \bar{E}$ ニ對シテ $\lim f(x_{n_i})$ が存在スルナラ，$\mathfrak{M}$ ハ conditionally weakly compact デアルト云フ。

$\{x_n\}$ ノ弱收斂ハ $F_n(f) \equiv f(x_n)$ ノ弱收斂ト同ジコトデアルカラ Lemma 9ト，上ノ 1°，2° カラ

3°. $\mathfrak{M} \subset E$ ヲ有界，separable set トスル．任意ノ系列 $\{x_n\}_{n=1,2,\cdots\cdots}$ $(x_n \in \mathfrak{M})$ ニ次ノ様ナ $F \in \bar{\bar{E}}$ ヲ對應サセル。

$$\underline{\lim}\, f(x_n) \leq F(f) \leq \overline{\lim}\, f(x_n) \quad \text{for all } f \in \bar{E}$$

コノ $F(f)$ ノ全体ヲ $H$ トスル．モシ $H$ が separable ナラバ $\mathfrak{M}$ ハ conditionally weakly compact デアル。

4°. $x_n \in E$，$\|x_n\| \leq 1$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ が與ヘラレタトスル。

モシ

$$\underline{\lim}\, f(x_n) \leq F(f) \leq \overline{\lim}\, f(x_n) \quad \text{for all } f \in \bar{E}$$

トナル $F \in \bar{\bar{E}}$ ノ全体が separable ナラ $\{x_n\}$ ハ cond. weakly compact デアル。

5°. $f_0 \in \bar{E}$，$\|f_0\| = 1$ が與ヘラレタトスル。
$\|f\| \leq 1$ ノ $f_0$ ニ於ケル Stütz hyperebene $F(f) = 1$ が separable set $\{F\} \subset \bar{\bar{E}}$ ヲナシ，$f_0(x_n) \longrightarrow 1$ $(\|x_n\| \leq 1)$ ナラバ $\{x_n\}$ ハ cond. weakly

compact デアル。