822. 標數0ノ代數的閉体ノ上ノ單純りい環ノ分類ニ就イテ[1]

荻野　修作（阪大）

§1. Ω ヲ characteristic zero ノ代數的閉体, Δ ヲ Ω ニ含マレル有理數体ノ實閉擴大体トセヨ. $\mathfrak{R}$ ヲ Ω ノ上ノ semi-simple Lie ring トシ $\mathfrak{R}$ ノ regular element ヲ含ム maximal abelian subring $\mathfrak{H}$ ニヨル $\mathfrak{R}$ ノ分解ヲ

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{H} + e_{\alpha}\Omega + e_{-\alpha}\Omega + \cdots\cdots$$

$$\mathfrak{H} = h_1\Omega + h_2\Omega + \cdots\cdots + h_n\Omega$$

トス、此処ニ α ハ所謂 $\mathfrak{R}$ ノ root デ Δ ノ元ヲ係數ニ有スル parameter $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n$ ノアル linear form $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i$ デアリ各 root α ニ對シテ $-\alpha$ ガ亦 root トシテ表ハレル。

扨テ $\mathfrak{R}$ ノ basis h_i, e_α ヲ適當ニ normieren スレバ basis 間ノ計算規則ハ次ノ様ニナル。[2]

$$[h_i, h_k] = 0, \qquad 1 \leqq i, k \leqq n$$

$$[h, e_\alpha] = \alpha \cdot e_\alpha \qquad 即 \quad [h_i, e_\alpha] = a_i e_\alpha$$

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha = -\sum_{i=1}^{n} a_i h_i$$

---

1) 吉田氏：りい環論參照.

2) H. WEYL: Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformation II. Math. Zeitschr. 24.

$$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta}\, e_{\alpha+\beta} \quad \text{for} \quad \alpha+\beta \neq 0$$

此処ニ $\alpha+\beta\neq 0$ ガ root ナラバ $N_{\alpha\beta}\neq 0$, root デナケレバ $N_{\alpha\beta}=0$.

更ニコノ $N_{\alpha\beta}$ ハ次ノ関係ヲミタス。

$$N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha} = N_{\alpha\beta} \quad \text{for} \quad \alpha+\beta+\gamma=0$$

$$N_{\beta\gamma}N_{\alpha\delta} + N_{\gamma\alpha}N_{\beta\delta} + N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta} = 0$$

$$\text{for} \quad \alpha+\beta+\gamma+\delta=0,\ \beta+\gamma,\ \gamma+\alpha,\ \alpha+\beta\neq 0$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{-\alpha,-\beta}, \quad N_{\beta\alpha} = -N_{\alpha\beta}$$

更ニ又 $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ二ツノ root α, β ヲトレバ

$\beta-i\alpha, \cdots, \beta-\alpha, \beta, \beta+\alpha, \cdots, \beta+k\alpha$ ハ root,

$\beta-(i+1)\alpha,\ \beta+(k+1)\alpha$ ハ root デハナイ.

様ナ integer $i, k \geq 0$ ガ定マルガ, 此ノ時

$$R_{\beta\alpha} = -\frac{(i+1)k}{2}\alpha_\alpha$$

ト置ケバ

$$N_{\alpha\beta}^2 = R_{\alpha\beta}$$

扨テ Δ ノ元ヲ component トスル euclidean metric ヲ有スル n-dim. vectorspace ヲ Δ_n トセヨ。$\mathfrak{R}$ ノ各 root $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i$ ニ對シテ Δ_n ノ vector $a=(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$ ヲ考ヘレバ

$$\alpha\beta = -\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = -ab$$

ガ成立スル. コノ事実ニ注意スレバ $\mathfrak{R}$ ノ root ($\neq 0$) ニ對應スル Δ_n ノ vector ノ全体ヲ ∇ トスル時, ∇ ハ次ノ條

件ヲミタサネバナラヌ。[3]

0. ∇ハ n 個ノ linearly independent ナ vector ヲ含ム。

1. $a, b \in \nabla \rightarrow 2ab/a^2 = \text{integer}$.

2. $a, b \in \nabla \rightarrow b - ja \in \nabla,\ j = 0, \cdots\cdots, 2ab/a^2$

3. $a \in \nabla \quad \rightarrow 2a \bar{\in} \nabla$ [4]

V. D. Waerden ハ $\mathfrak{R}$ ガ simple ナラバ更ニ次ノ條件

4. ∇ハ互ニ orthogonal ナ subsystem ニ分タレヌ。

ガ成立スルコトニ注意シ、條件 0—4 ヲミタス Δ_n ノ vector ノ system ∇ ノスベテノ type ヲ定メタ。今 e_i ニテ基礎 vector ヲ示ストキソノ結果ハ次ノ様ニナル。

$A_n: \quad e_i - e_k.$

$B_n: \quad \pm e_i, \ \pm e_j \pm e_k.$

$C_n: \quad \pm 2e_i, \ \pm e_j \pm e_k.$

$D_n: \quad \pm e \cdot \pm e_k.$

$G_2: \quad e_i - e_k, \ e_p - 2e_q + e_r.$

$F_4: \quad \pm e_i, \ \pm e_j \pm e_k, \ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$

---

3) B. L. van der Waerden: Die Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen. Math. Zeitschr. 37.

4) V. D. Waerden's condition: ∇ enthalt mit a auch $-a$, aber keine weiteren vielfachen ka. 此処ガ導ガタ條件 1, 2, 3 カラデアル。

$$E_6:\ e_i-e_k,\ \tfrac{1}{2}(e_p+e_q+e_r-e_s-e_t-e_u\pm\sqrt{2}e_7),$$
$$\pm\sqrt{2}e_7.$$
$$E_7:\ e_i-e_k,\ \tfrac{1}{2}(e_p+e_q+e_r+e_s-e_t-e_u-e_v-e_w)$$
$$E_8:\ \pm e_i\pm e_k,\ \pm\tfrac{1}{2}(e_p+e_q+e_r+e_s+e_t+e_u+e_v-e_w)$$
$$\pm\tfrac{1}{2}(e_p+e_q+e_r+e_s+e_t-e_u-e_v-e_w).$$

所デ V.D. Waerden ハ十分ナルコト即チ條件 0—4 ヲミタス Δ_n ノ vector ノ system ∇ ニ對應スル root system ヲ有スル simple Lie ring ガ確カニ存在スルカ否カノ問題ニハ少シモ触レテオラヌ。更ニ semi-simple Lie ring ニ於テ條件 4 ガ成立スルトキ $\mathfrak{N}$ ガ simple ナルカ否カニ就テモ氏ハ少クトモ直接ニハ注意シテオラヌ様ニ思ハレル。

一方 É. Cartan ハソノ Thèse ニ於テ H. Weyle ノ所謂 „komplizierte Determinantenrechnungen" ニヨリ simple Lie ring ノ root system (ノ候補者?) ヲ定メ[5]，更ニ其等ヲ實際ニ root system トシテ持ツヤウナ simple Lie ring ノ存在ヲ論ジテヰル. 之ガ實ニ單純リー環ノ分類ニ関シテ氏ガ W. Killing ヲ越エテ前進シタ点デアツタ!! 然ルニ氏ノ simple Lie ring ノ存在ニ関スル議論ハ 9通リノ各場合ニツイテ別々ニ話ヲ進メテ行クノデアリ、加フルニソノ計算ハ複雑困難ヲ極メ，

---

5) V.D. Waerden ハソレヲ root vector ノ問題ニ轉化シ root system ヲ幾何學的ニ定メタノデアツタ.

氏自身ハ確実ナコトヲナシタコトハ万々疑ヒノナイコトデハアラシが、氏以外ノ人ニ氏ノ結果ノ正當性ヲ認識セシメルコトハ相當ニ困難ナコトデハアルマイカ。而モ氏ノ議論ハ單ニ構造常数 C_{ijk} ヲ決定シタト云フニ止マリ、ソレが Jacobi ノ恒等式ヲ滿足セシメ得ルカ否カニツイテハ明瞭デナイヤウニ思ハレル、更ニ出来上ッタ Lie ring が semi-simple デアルコトノ証明モ少ク共氏ノ Thèse ニハ缺ケヲヰル(之レが云ヘナケレバ出来上ッタ Lie ring が simple カ否カノ判定が簡單ニ云ヘヌト思フ)——尤モコレ等ノコトハ氏ニトッテハ証明ヲ要セザル程 trivial ノコトデアッタノデアラウ。

何レニセヨ H. Weyle ニヨリ、以上デ述べタ形ニ simple Lie ring ノ basis が normieren セラレ、続イテ V. D. Waerden ニヨリ simple Lie ring がソノ root system ニヨリ完全ニ定マルコトが指摘セラレ而モ root system ニ対スル條件 0—4 が出サレテヰル以上コレ等ヲ用ヒテ simple Lie ring ノ型が上ニ述べタ 9 通リ実際ニ存在スルコトノ証明がモウ少シ分リ易イ形デ出来テモヨサソウニ思ハレル。

以下次ニ述べマスノハ、ソノ Vorarbeit ノ積リデアリマス。

先ヅ §2 デ次ノ定理ヲ証明シマス。

Theorem: characteristic zero ノ代数的閉体ノ上ノ semi-simple Lie ring ハソノ root system

ガ互ニ orthogonal ナ subsystem ニ分タレヌ時其時ニ限リ simple デアル。

次デ§3デ次ノ Lemma ヲ假定シテ條件0—4ヲミタスΔ_nノ vector ノ set ∇ ヲ root system ニ對應スル vector ノ set トスルヤウナ Lie ring ガ存在シテ而モ其レ等ガ semi-simple ニナル(從テ Theorem カラ simple ニナルコトガ分ル)コトヲ証明シマス。

Lemma: $N_{\alpha\beta}$ ヲ次ノ様ニ定メルコトガ出来ル。

$$N_{\alpha\beta}=\varepsilon\sqrt{R(a,b)},\quad \varepsilon=+1 \text{ or } -1$$

$$N_{\beta\alpha}=-N_{\alpha\beta},\qquad N_{-\alpha,-\beta}=N_{\alpha\beta}$$

$$N_{\beta\gamma}=N_{\gamma\alpha}=N_{\alpha\beta}:\quad \alpha+\beta+\gamma=0$$

$$N_{\beta\gamma}N_{\alpha\delta}+N_{\gamma\alpha}N_{\beta\delta}+N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta}=0.$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0;\ \beta+\gamma,\ \gamma+\alpha,\ \alpha+\beta\neq 0$$

コノ Lemma ハ問題トシテハ單ナル初等幾何ノ問題ニ過ギヌノデスガ筆者ニハ手ニ負ヘマセンデシタ．御示教ヲ得タイト思ヒマス．尤モ V.D. Waerden ガ述ベタ semi-simple Lie ring ガソノ root system ニヨリ完全ニ定マルコトノ証明[6]デノ方針デヤレバ高々有限回ノ計算デ目的ガ達セラレル訳デアリマスガソレデハ大変デマ。

最後ニ§4デ type A_{n-1}, B_n, D_n ニツイテノ Lemma ノ証明ヲ試ミマス．尤モ type A_n, B_n, C_n, D_n ノ simple Lie ring ハ matrix ニヨリ奇麗ナ形デ表ハサレテヰル位デ Lemma ハコノ場合ハアマリ問題

6) B.L. v.D. Waerden 前掲論文

ニスル必要ガナイ訳デスガ、A_{n-1}, B_n, D_n ノ三ツノ場合ガ殆ンド同時ニ片附ク点ガ面白イト思ハレマスノデ書イテ置クコトヲ許シテ戴キタイト思ヒマス。

§2. Thorem ノ証明. Ω ノ上ノ semi-simple Lie Ring $\mathfrak{R}$ ノ root $(\neq 0)$ ニ對應スル Δ_n ノ vector ノ system ∇ ガ互ニ orthogonal ナ subsystem ∇_1, ∇_2, -----, ∇_k ニ分タレルナラバ $\mathfrak{R}$ ハ ∇_i ニ對應スル $\mathfrak{R}$ ノ ideal $\mathfrak{R}_i$ ノ direct sum ニナルコトハ既ニ v. D. Waerden ガ指摘シテオルヤウニ trivial ニ見ラレルカラ, 今 ∇ ガ互ニ orthogonal ナ subsystem ニ分タレヌモノト假定シテ、コノトキ $\mathfrak{R}$ ガ simple ナルコトヲ示ス。[7)]

$\mathfrak{R}$ ノ ideal $\neq 0$ ヲ $\mathfrak{r}$ トセヨ。

先ヅ少クトモ一ツノ root α ニ對シテ $e_\alpha \in \mathfrak{r}$ ナルコトヲ示ス。

$d \neq 0$ ヲトル: $\quad d = \sum_{i=1}^{n} d_i h_i + \sum_{\alpha} d_\alpha e_\alpha$

スベテノ $d_\alpha = 0$ ノ場合: コノ時 $d = \sum d_i h_i$ デ少クトモ一ツノ $d_i \neq 0$, 故ニ

$$(\sum d_i a_i)\, e_\alpha = [d, e_\alpha] \in \mathfrak{r}$$

デアルガ, 今 $\mathfrak{R}$ ノスベテノ root $\alpha = \sum a_i \lambda_i$ ニ対シテ

---

7) 勿論 É. Cartan ノ單純リい環ノ分類ニ関スル結果ヲ承認スレバ, コノコトノ成立スルコトガ自然ニ出ル。然レソレデハ余リニ面白クナイシ而モ我々ノ今ノ目的ニ対シテハ不適当デアル。

$\sum d_i a_i = 0$ トナレバ α ガ linearly independent ナ n 個ノ root ヲ動カスコトニヨリ $d_1, d_2, \ldots\ldots, d_n$ ガスベテ zero ナルコトガ決論セラレルカラ少クトモ一ツノ root α ニ対シテ $\sum d_i a_i \neq 0$，従ッテ斯ル root α ニ對シテ $e_\alpha \in \gamma$.

少クトモ一ツノ $d_\alpha \neq 0$ ノ場合: $d_\alpha \neq 0$ トセヨ：コノ時 $e_\alpha \in \gamma$ ナルコトガ N. Jacobson[8] ニ於ケルガ如ク次ノ様ニシテ示サレル：

$\mathfrak{g}$ ノ general element ヲ h トスレバ

$$[\overbrace{h[h\cdots\cdots[h}^{j\text{個}},d]\cdots\cdots]] = \sum_{\alpha} d_\alpha \alpha^j e_\alpha$$

$\mathfrak{R}$ ノスベテノ root ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_m$ トスレバ determinant

$$D(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots\cdots & \alpha_m \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots\cdots & \alpha_m^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^m & \alpha_2^m & \cdots\cdots & \alpha_m^m \end{vmatrix}$$

ハ identically = zero ニハナラヌカラ $D(\lambda^0) \neq 0$ ナル λ^0 ガトレル. determinant $D(\lambda)$ デ α ノ列ノ

---

8) N. Jacobson: A class of normal simple Lie algebras of characteristic zero. Ann. of Math. vol. 38.

cofactor ヲ $D_1, D_2, \cdots\cdots, D_m$ トスレバ

$$\sum_{i=1}^{m} \beta^i D_i = \begin{cases} D : \beta = \alpha \\ 0 : \beta \neq \alpha . \end{cases}$$

之レヲ用フレバ

$$D(\lambda)\, d_\alpha \cdot e_\alpha = \sum_{j=1}^{m} D_j \cdot \sum_{\alpha} d_\alpha \alpha^j e_\alpha$$

$$D(\lambda^0)\, d_\alpha \cdot e_\alpha \in \gamma$$

$D(\lambda^0)\, d_\alpha \neq 0$ ダカラ，之レカラ $e_\alpha \in \gamma$.

斯クテ何レニシテモ ideal $\gamma \neq 0$ ハ e_α ナルーツノ basis ヲ含ムコトガ知ラレタ。

次ニ $e_\alpha \in \gamma$ ナラバ $e_{-\alpha} \in \gamma$ デアル。

何者：$h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}] \in \gamma$ 従テ $-\alpha_\alpha \cdot e_{-\alpha} = [h_\alpha, e_{-\alpha}]$ ハ γ ニ属スルガ $\alpha_\alpha \neq 0$ デアルカラ $e_{-\alpha} \in \gamma$ トナル。

以上ノコトカラ γ ガ $\mathfrak{R}$ ノ e_ρ ナル形ノスベテノ basis ヲ含ムコトガ知ラレル．ソレニハ次ノコトガ云ヘレバヨイ。

Lemma: $\mathfrak{R}$ ノ root system ニ對應スル Δ_n ノ vector ノ system ∇ ノ subsystem ∇' ガ次ノ條件

1° ∇' ハ ∇ ノ少クトモーツノ vector ヲ含ム．

2° $a \in \nabla' \longrightarrow -a \in \nabla'$

3° $a \in \nabla',\ b \in \nabla,\ a+b \in \nabla \longrightarrow a+b \in \nabla'$

ヲミタスナラバ ∇' ハ ∇ ニ一致スル。

何者：$\mathfrak{r}$ニ含マレル$\mathfrak{R}$ノe_ρナル形ノbasisニ對應スル∇ノvectorノ全体ヲ∇'トスレバ、コノ∇'ハLemmaノ條件$1°$, $2°$, $3°$ヲミタス。$1°$, $2°$ハ以上デ証明シタコトカラ、$3°$ハ$\mathfrak{r}$ガidealナルコト及ビ$\alpha+\beta$ガ$\mathfrak{R}$ノroot$\neq 0$ナラバ$N_{\alpha\beta}\neq 0$ナルコトカラ知ラレル。從ナコノLemmaガ証明セラレタトスレバ$\mathfrak{r}$ハ$\mathfrak{R}$ノe_ρナル形ノbasisヲスベテ含ム。

トコロデ$\mathfrak{r}$ガ$\mathfrak{R}$ノe_ρナル形ノスベテノbasisヲ含メバ$\mathfrak{r}$ハ$\mathfrak{R}$ニ一致スル。何者：$h_\alpha=[e_\alpha, e_{-\alpha}]\in\mathfrak{r}$デ$h_\alpha=-\sum_{i=1}^n a_i h_i$。今$\alpha$トシテlinearly independentナ$n$個ノrootヲ動カセバコノ$n$個ノ$h_\alpha$ハ$\mathfrak{g}$ノbasisヲ作ルカラ.

斯クテLemmaガ証明セラレレバ我々ノ主張ハ成立スルコトニナル。

Lemmaノ証明：　$1°$ニヨリ含マレル∇'ノvectorヲaトス.

然ラバ條件$2°$カラ$-a\in\nabla'$. bヲ∇ノ任意ノvectorトス。

$ab\neq 0$ノ場合. コノトキ$ab>0$ or $ab<0$.

$ab>0$ナラバ$2ab/a^2\geqq 1$. 故ニ$b-a\in\nabla$.
$b-a\in\nabla$, $a\in\nabla'$, $(b-a)+a\in\nabla$ダカラ條件$2°$カラ$b\in\nabla'$.

$ab<0$ナラバ$2ab/a^2\leqq -1$, 故ニ$b+a\in\nabla$,
$b+a\in\nabla$, $-a\in\nabla'$, $(b+a)-a\in\nabla$ダカラ條件$2°$

カラ $b\in\nabla'$.

$ab=0$ ノ場合.

$\nabla_1=\{a,-a\}$ トシ ∇_1 ノ vector = orthogonal ナ ∇ ノ vector ノ全体ヲ $\widetilde{\nabla}_1$ トスレバ $b\in\widetilde{\nabla}_1$. ∇_1 ト $\widetilde{\nabla}_1$ トノ vector ノ全体ガ ∇ ノ vector ノ全体トナレバ初メニ設ケタ ∇ ニ對スル假定4ニ反ス。故ニ ∇_1 ニモ $\widetilde{\nabla}_1$ ニモ屬セヌ ∇ ノ vector a_1 ガアル. $a_1b=0$ ナラバ ∇_1 ノ vector 及ビ a_1 ニヨリ張ラレル vector space ニ屬スル ∇ ノ vector ノ全体ヲ ∇_2 トスル: $\nabla_1\subsetneqq\nabla_2$, $b\perp\nabla_2$. ∇_2 = orthogonal ナ ∇ ノ vector ノ全体ヲ $\widetilde{\nabla}_2$ トスレバ $b\in\widetilde{\nabla}_2$ デ假定4カラ ∇_2 ニモ $\widetilde{\nabla}_2$ ニモ屬セヌ ∇ ノ vector a_2 ガアル。 $a_2b=0$ ナラバ ∇_2 ノ vector 及ビ a_2 ニヨリ張ラレル vectorspace ニ屬スル ∇ ノ vector ノ全体ヲ ∇_3 トスル: $\nabla_2\subsetneqq\nabla_3$, $b\perp\nabla_3$, $\cdots\cdots$

斯クシテ進メバ $\nabla_1\subsetneqq\nabla_2\subsetneqq\nabla_3\subsetneqq\cdots\cdots$ ヲ得ルカラ ∇ ノ vector ノ個數ノ有限ナルコトカラ $ab=0$, $a_1b=0$, $\cdots\cdots$, $a_{i-1}b=0$, $a_ib\neq0$ ナル i ガ定マル. 今ノ作リ方カラ明カニ $aa_i\neq0$ デアルカラ既ニ示シタ証明カラ $a_i\in\nabla'$ 従テ 2° カラ $-a_i\in\nabla'$, コレト $a_ib\neq0$ トカラ $b\in\nabla'$.

Remark. 以上ノ証明カラ次ノ良ク知ラレタ結果ガ characteristic zero ノ代数的閉体ノ上ノ Lie ring ニツイテ直チニ決論セラレル:

simple Lie ring ハ semi-simple 且 simple ナ ideal ノ直和ニ分解セラレル。

§3. §1 デ挙ゲタ條件 0—4 ヲミタス Δ_n ノ vector ノ集合ヲ ∇ トセヨ。∇ ヲ root system ニ對應スル vector ノ set トスル樣ナ simple Lie ring ガ實際ニ存在スルコトヲ §1 デ述ベタ Lemma ヲ假定シタ上デ示ソウト云フノデアルガ，其タメニ尚ニニノ Lemma ヲ證明シナケレバナラナイ。

∇ ノ vector a, b ニ對シテ

$$T(b, a) = 2ba/a^2$$

ト置ク。更ニ V. D. Waerden ノ結果カラモ明カナ樣ニ ∇ ノ vector ノ個數ハ有限デアルカラ

$$b-ia, \cdots\cdots, b-a, b, b+a, \cdots\cdots, b+ka \in \nabla$$

$$b-(i+1)a, \quad b+(k+1)a \,\bar{\in}\, \nabla$$

ナル integer $i, k \geqq 0$ ガ定マルガコノトキ

$$R(b, a) = \frac{(i+1)k}{2}a^2$$

ト置ク。$a+b \,\bar{\in}\, \nabla$ ナラバ當然 $R(b, a) = 0$ デアル.

i) $\quad T(b, a) = i - k$

---

9) 勿論コノコトハ characteristic zero ノ field ノ上ノ semi-simple Lie ring ニテ $\varphi(x) = \mathrm{trace}(X^2)$ ガ non-singular ナルコトニ注意スレバ（代數的關係ナル制限ナシニ）一般ニ成立スルコトガ見ラレル。吉田氏：りい環論 PP. 10—12 參照。

証. 先ヅ $b, a \in \nabla$, $b-a \bar{\in} \nabla$ ナラバ

$b-(T(b,a)-1)a \bar{\in} \nabla$ デアル.

何者: $b-(T(b,a)-1)a \in \nabla$ ナラバ、∇ ニ對スル條件2カラ

$$b-(T(b,a)-1)a-T(b-(T(b,a)-1)a,a)a$$
$$=b-a$$

ガ ∇ ニ属スルコトニナリ不合理トナルカラ

扨テ $b-ia$, $a \in \nabla$ デ $b-(i+1)a \bar{\in} \nabla$ デアルカラ今ノ結果ヲ用フレバ

$$b-ia-(T(b-ia,a)-1)a$$
$$=b+((i+1)-T(b,a))\cdot a$$

ハ ∇ ニ属セヌ. 從テ ∇ ニ對スル條件2カラシテ

$$i-T(b,a)=k, \quad T(b,a)=i-k$$

デナケレバナラヌ。

ii) $ba=R(-b,a)-R(b,a)$.

証. $b-ia, \cdots, b-a, b, b+a, \cdots, b+ka \in \nabla$

$$b-(i+1)a, \quad b+(k+1)a \bar{\in} \nabla$$

トスレバ

$$-b-ka, \cdots, -b-a, -b, -b+a, \cdots, -b+ia \in \nabla$$
$$-b-(k+1)a, \quad -b+(i+1)a \bar{\in} \nabla$$

デアルカラ R ノ def. カラ

$$R(-b,a)=\frac{(k+1)i}{2}a^2$$

故ニ i) ヲ用ヒテ

$$R(-b,a)-R(b,a)=\frac{i-k}{2}a^2=\frac{T(b,a)}{2}a^2=ba.$$

iii) $R(a,b)=R(-a,-b)$

$$\begin{aligned} R(a,b)&=R(b,c)=R(c,a)\\ &=R(b,a)=R(c,b)=R(a,c); \end{aligned}$$

$$a+b+c=0.$$

證. $a+b+c=0$ ナル∇ノ vector a,b,c ニ於テ $a^2\leqq b^2\leqq c^2$ ト假定スルモ一般性ヲ失ハヌ。然ル時∇ニ對スル條件ノカラ次ノ三ツノ場合ノミ可能デアルコトガ知ラレル。

場合1. $b^2=a^2,\ c^2=3a^2 : ab\neq 0.$

場合2. $b^2=a^2,\ c^2=2a^2 : ac\neq 0.$

場合3. $a^2=b^2=c^2 \qquad : ac\neq 0.$

更ニ∇ニ對スル條件2カラ v. d. Waerden ノ計算ノ如クシテ、コノ a, b, c ナル三個ノ vector ノ張ル Δ_n ノ subspace ニ屬スル∇ノ vector ハ場合 1, 2, 3 ナルニ從ツテ G_2, B_2 又ハ A_2 ノ type ヲ作ル. 之カラ $R(a,b)=R(-a,-b)$ ハ明カ. 更ニ

場合1デハ $R(a,b)=\dfrac{3b^2}{2},\ R(b,c)=\dfrac{c^2}{2},$

$$R(c,a)=\frac{3a^2}{2},\ \cdots\cdots$$

場合2デハ $R(a,b)=b^2,\ R(b,c)=\dfrac{c^2}{2},$

$$R(c,a)=a^2,\ \cdots\cdots$$

場合3デハ $R(a,b)=\frac{b^2}{2}$，$R(b,c)=\frac{c^2}{2}$，

$$R(c,a)=\frac{a^2}{2},\cdots\cdots$$

ヲ得ルカラ主張ハ成立スル。

扨テ ∇ ノ各 vector a ニ對シテ

$$Na=-\frac{1}{2}a^2\sum\frac{g(g+1)(g+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

ト置ク。此処ニ $\sum g(g+1)(g+2)/1\cdot 2\cdot 3$ ハ H. Weyle II. P. 366 (21) 式ト同ジ意味ヲ有スルモノトス　コノ際 H. Weyle ノ計算カラ $Na\neq 0$ デアル。之レニ對シテ次ノコトガ成立スル。

iv) ∇ デ次ノ條件ヲミタス n 個ノ linearly independent ナ vector $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ ガトレル。

$$Nb_1=Nb_2=\cdots\cdots=Nb_n.$$

證. 先ヅ ∇ ニテ

$$a_1 a_j\neq 0,\quad j=2,3,\cdots\cdots,n$$

ヲミタス linearly independent ナ n 個ノ vector $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ガトレル。例ヘバ

A_n デハ　$a_i=e_1-e_{i+1}$　$(i=1,2,\cdots\cdots,n)$

B_n デハ　$a_i=e_1+e_{i+1}$　$(i=1,2,\cdots\cdots,n-1)$，

$$a_n=e_1$$

C_n デハ　$a_i=e_1+e_{i+1}$　$(i=1,2,\cdots\cdots,n-1)$

$$a_n=2e_1$$

D_n デハ　$a_i=e_1+e_{i+1}$　$(i=1,2,\cdots\cdots,n-1)$

$$a_n = e_1 - e_n$$

E_6 デハ $a_i = e_1 - e_{i+1} \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, 5)$

$$a_6 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5 - e_6 + \sqrt{2}\, e_7)$$

トスレバヨイ（G_2 ハ A_2 ヲ，F_4 ハ B_4 ヲ，E_7 ハ A_7 ヲ，E_8 ハ A_8 ヲ含ムカラ之レラニツイテハ既ニ示サレテ来ル）

斯ル n 個ノ vector a_i ヲ用ヒ

$$b_i = a_1 - T(a_1, a_i)\cdot a_i, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

ト置ケバ容易ニ

$$b_i^2 = a_1^2, \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

ナルコトガ見ラレル．更ニ a_i ノ取リ方カラ $T(a_1, a_i) \neq 0$，従テ $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$ ハ linarly independent．而シテ transformation $X' = X - T(X, a_i)\cdot a_i$ ハ Δ_n ノ原点ヲ通リ vector a_i ニ orthogonal ナ超平面ニ関スル reflection ヲ意味スルカラ各 b_i ニ関スル。

$$\sum g(g+1)(g+2)/1\cdot 2\cdot 3$$

ノ値ハ a_1 ノソレニ一致シ，従テ $b_i^2 = a_1^2$ カラ $Nb_i = Na_1$ が成立スル。

扨テ此処デ §1 デ述ベタ Lemma ヲ假定スレバ次ノコトガ証明セラレル。

Theorem. 條件 0—4 ヲミタス vector ノ set ∇ ヲ root system ニ對應スル vector ノ set トスルヤウナ semi-simple 且ツ simple ナ Lie ring が存在スル。

証. ∇ ノ各 vector $a=(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$ ニ對シテ parameter $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n$ ノ linear form $\alpha=\sum_{i=1}^n a_i\lambda_i$ ヲ考ヘル. 先ヅ Δ ヲ含ム代數的閉体 Ω ノ上ノ vector space ヲ作ル。

$$\mathfrak{R}=h_1\Omega+\cdots\cdots+h_n\Omega+\sum_{a\in\nabla} e_\alpha\Omega$$

次ニ $\mathfrak{R}$ ノ basis 間ノ計算規則ヲ次ノ如ク def. スル:

$$[h_i, h_k]=0, \quad 1\leqq i, k\leqq n.$$

$$[h, e_\alpha]=\alpha\cdot e_\alpha \quad 特ニ [h_i, e_\alpha]=a_i e_\alpha$$

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}]=h_\alpha=-\sum_{i=1}^n a_i h_i$$

$$[e_\alpha, e_\beta]=N_{\alpha\beta}\,e_{\alpha+\beta}: \quad \alpha+\beta\neq 0$$

此処ニ $a+b\bar{\in}\nabla$ ノトキハ $N_{\alpha\beta}=0$ ト定メル. $a+b\in\nabla$ ノトキハ §1 デ述ベタ Lemma ノ假定ノ下デ次ノ如ク $N_{\alpha\beta}$ ヲ定メル (iii ノ式参照)

$$N_{\alpha\beta}=\varepsilon\sqrt{R(a,b)}, \qquad \varepsilon=+1 \text{ or } -1$$

$$N_{\alpha\beta}=N_{-\alpha,-\beta}, \quad N_{\beta\alpha}=-N_{\alpha\beta}$$

$$N_{\beta\gamma}=N_{\gamma\alpha}=N_{\alpha\beta}: \quad \alpha+\beta+\gamma=0$$

$$N_{\beta\gamma}N_{\alpha\delta}+N_{\gamma\alpha}N_{\beta\delta}+N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta}=0:$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0, \; \beta+\gamma, \; \gamma+\alpha, \; \alpha+\beta\neq 0$$

更ニ

$$[u, v]+[v u]=0$$

ト置キ distributive Law ヲ假定スレバ $\mathfrak{R}$ ハ Lie ring ヲ作ル。ソレニハ Jacobi ノ恒等式ヲ示セバ十分

デアル。トコロデ $N_{\alpha\beta}$ ノ取リ方カラ

$$[e_\alpha[e_\beta e_\gamma]]+[e_\beta[e_\gamma e_\alpha]]+[e_\gamma[e_\alpha e_\beta]]=0:$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0,\ \beta+\gamma,\ \gamma+\alpha,\ \alpha+\beta\neq 0.$$

ガ成立スルコトハ當然デアルカラ

$$[e_\alpha[e_\beta, e_{-\beta}]]+[e_\beta[e_{-\beta} e_\alpha]]+[e_{-\beta}[e_\alpha e_\beta]]=0:$$

$$\alpha\neq\pm\beta$$

ヲ示セバヨイ。他ノ場合ハ *trivial* ニ成立スルカラ

扨テ

$$[e_\alpha[e_\beta, e_{-\beta}]]+[e_\beta[e_{-\beta}, e_\alpha]]+[e_{-\beta}[e_\alpha e_\beta]]$$
$$=(-\alpha\beta+N_{-\beta,\alpha}N_{\beta,-\beta+\alpha}+N_{\alpha\beta}N_{-\beta,\alpha+\beta})e_\alpha$$
$$=(-\alpha\beta-N^2_{-\alpha,\beta}+N^2_{\alpha\beta})e_\alpha$$
$$=(-ab-R(-a,b)+R(a,b))e_\alpha$$

従テ iii ノ式カラ左辺ハ $=0$ トナリ主張ハ成立スル。

次ニ $\mathfrak{R}$ ガ *semi-simple* ナルコトヲ示ス。

$\varphi(x)=\mathrm{trace}\ X^2$ ヲ計算スレバ

$$\varphi(x)=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\lambda_i\lambda_j+\sum_\alpha N_\alpha\tau_{-\alpha}\tau_\alpha$$

此処ニ、

$$g_{ij}=\mathrm{trace}\,(H_iH_j)$$
$$N_\alpha=\mathrm{trace}(E_{-\alpha}E_\alpha)=\frac{1}{2}\alpha_\alpha\sum\frac{g(g+1)(g+2)}{1.2.3}$$

ナルコトハ *basis* 間ノ計算規則カラ知ラレル。コノ場合 $N_\alpha\neq 0$ ナルコトハ既ニ注意シタ。次ニ

$$\varphi([e_\beta x],x)=0$$

カラ次ノ関係ガ出ル。[10]

$$N_\beta\cdot\beta=\sum g_{ij}\, b_i \lambda_j \,,$$

従テ $$N_\beta\, b_j=\sum g_{ij}\cdot b_i$$

扨テ Lemma iv) ニヨリ

$$N_{\beta^{(i)}}=N \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

ナル n 個ノ linearly independent ナ $\beta^{(i)}$ ガトレル. 上式ニ於テコノ $\beta^{(i)}$ ヲ用ヒレバ

$$g_{1j}\, b_1^{(i)}+\cdots\cdots+g_{j-1,j}\, b_{j-1}^{(i)}+(g_{jj}-N)\, b_j^{(i)}$$
$$+g_{j+1,j}\, b_{j+1}^{(i)}+\cdots\cdots+g_{nj}\, b_n^{(i)}=0$$

$$i=1,2,\cdots\cdots,n$$

$\beta^{(1)},\beta^{(2)},\cdots\cdots,\beta^{(n)}$ ノ linearly independent ナルコトカラ, 之カラ

$$g_{ij}=\begin{cases}0 : i\neq j\\ N : i=j\end{cases}$$

$$\therefore\quad \varphi(x)=N\,(\lambda_1^2+\cdots\cdots+\lambda_n^2)+\sum_\alpha N_\alpha\, \tau_{-\alpha}\tau_\alpha$$

之レカラ明カニ $\varphi(x)$ ハ non-singular 従テ $\mathfrak{R}$ ハ semi-simple デアル。

更ニ $\mathfrak{R}$ ノ root system ニ對應スル Δ_n ノ vector ノ system ハ明カニ初メ與ヘタ ∇ デアリ、コノ ∇ ハ條件以ヲミタスノデアルカラ §2 ノ Theorem カラ $\mathfrak{R}$ ハ simple デアル。以上。

---

10) 吉田氏：リイ環論 P.26 參照.

§4. 此処デハ type A_{n-1}, B_n, D_n ノ vector ノ system ニツイテ §1 デ述ベタ Lemma ヲ証明スル。即チ $N_{\alpha\beta}$ ヲ次ノ通リニ定メルコトが出来ルコトヲ示ス。

$$N_{\alpha\beta}=\varepsilon\sqrt{R(a,b)},\quad \varepsilon=+1 \text{ or } -1$$

$$N_{\beta\alpha}=-N_{\alpha\beta},\quad N_{-\alpha,-\beta}=N_{\alpha\beta}$$

$$N_{\beta\gamma}=N_{\gamma\alpha}=N_{\alpha\beta}\ :\ \alpha+\beta+\gamma=0$$

(1) $$N_{\beta\gamma}N_{\alpha\delta}+N_{\gamma\alpha}N_{\beta\delta}+N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta}=0$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0,\ \beta+\gamma,\ \gamma+\alpha,\ \alpha+\beta\neq 0$$

証明: parameter $\lambda_1,\dots\dots,\lambda_n$ ニ対シテ次ノ通リナ順序ヲツケル。

$$\lambda_1>\lambda_2>\dots\dots>\lambda_n>0>-\lambda_n>\dots\dots>-\lambda_1$$

$\pm\lambda_i$ ヲ $\alpha,\beta,\dots\dots$ デ示シ $-\alpha=\alpha'$ ト置ク. $\alpha\neq\beta$ ニ対シテ次ノ様ナ函数 $\varphi(\alpha,\beta)$ ヲ def. スル。

$$\varphi(\alpha,\beta)=1 \text{ for } 0<\alpha<\beta \text{ or } \alpha<0<\beta$$

$$\varphi(\beta,\alpha)=-\varphi(\alpha,\beta),\quad \varphi(\alpha',\beta')=\varphi(\alpha,\beta).$$

更ニ $\alpha\neq\beta$, $\alpha\neq\gamma$, $\beta\neq\gamma$ ニ対シテ

$$\varphi(\alpha+\beta',\beta+\gamma)=-\varphi(\alpha,\beta')\varphi(\beta,\gamma)/\varphi(\alpha,\gamma)$$

従テ

(2) $$\varphi(\alpha+\beta',\beta+\gamma)\varphi(\alpha,\gamma)+\varphi(\alpha,\beta')\varphi(\beta,\gamma)=0$$

トスレバ次式が成立スルコトハ直チニ見ラレル。

$$\varphi(\beta+\gamma,\alpha+\beta')=-\varphi(\alpha+\beta',\beta+\gamma)$$

$$\varphi(\alpha'+\beta,\beta'+\gamma')=\varphi(\alpha+\beta',\beta+\gamma)$$

$$\varphi(\alpha+\beta',\beta+\gamma)=\varphi(\beta+\gamma,\gamma'+\alpha')$$
$$-\varphi(\gamma'+\alpha',\alpha+\beta')$$

次ニ

$$(\alpha+\beta')+(\beta+\gamma)+(\alpha'+\delta)+(\delta'+\gamma')=0$$

デアルガ之ニ對シテ次ノコトガ成立スル。

(3) $$\varphi(\alpha+\beta',\beta+\gamma)\varphi(\alpha'+\delta,\delta'+\gamma')$$
$$+\varphi(\alpha'+\delta,\alpha+\beta')\varphi(\beta+\gamma,\delta'+\gamma')=0$$

何者:

$$\varphi(\alpha+\beta',\beta+\gamma)\varphi(\alpha'+\delta,\delta'+\gamma')$$
$$=\varphi(\alpha,\beta')\varphi(\beta,\gamma)\varphi(\alpha',\delta)\varphi(\delta',\gamma')/\varphi(\alpha,\gamma)^2$$
$$\varphi(\alpha'+\delta,\alpha+\beta')\varphi(\beta+\gamma,\delta'+\gamma')$$
$$=-\varphi(\delta,\alpha')\varphi(\alpha,\beta')\varphi(\beta,\gamma)\varphi(\gamma',\delta')/\varphi(\delta,\beta')^2$$

$\varphi(\alpha,\gamma)^2=\varphi(\delta,\beta')^2=1$ ダカラコノ両式ヲ辺々相加ヘテ求ムル結果ニ到達スル。

以上デ type A_{n-1}, B_n, D_n ニツイテ Lemma ガ証明セラレテヰル。即チ

type A_{n-1} デハ

$$N_{\lambda_i-\lambda_j,\,\lambda_j-\lambda_k}=\varphi(\lambda_i-\lambda_j,\lambda_j-\lambda_k)$$

ト置ケバ (3) 式ガ條件(1)ノ成立スルコトヲ示シ

type B_n デハ

$$N_{\lambda_i,\lambda_k}=\varphi(\lambda_i,\lambda_k)$$
$$N_{\lambda_i,-\lambda_k}=\varphi(\lambda_i,-\lambda_k)$$
$$N_{\lambda_i-\lambda_j,\,\lambda_j+\lambda_k}=\varphi(\lambda_i-\lambda_j,\lambda_j+\lambda_k)$$
$$N_{\lambda_i-\lambda_j,\,\lambda_j\lambda_k}=\varphi(\lambda_i-\lambda_j,\lambda_j-\lambda_k)$$

ト置ケバ (2) 及ビ (3) 式ガ條件 (1) ノ成立スルコトヲ示シ

type D_n デハ

$$N_{\lambda_i-\lambda_j,\,\lambda_j+\lambda_k} = \varphi(\lambda_i-\lambda_j,\,\lambda_j+\lambda_k)$$

$$N_{\lambda_i-\lambda_j,\,\lambda_j-\lambda_k} = \varphi(\lambda_i-\lambda_j,\,\lambda_j-\lambda_k)$$

ト置ケバ(3)式ガ條件(1)ノ成立スルコトヲ示シテヰル。而シテ *Lemma* ノ他ノ條件ハ以上デ述ベタコトカラ明カニ成立シテヰルカラ我々ノ主張ハ成立スル。 ―以上―