# 821. Wiener 及ビ Vitali ノ covering theorem ニ就イテ

角谷 静夫（阪大）

N. Wiener ハ Duke math. Journal vol. 5 (1939) ニ於テ次ノ定理ヲ証明シテヰル。

<u>定理（Wiener）</u>　A ヲ $m$ 次元ノ Euclid 空間 $R^m$ 内ノ有界集合（必ズシモ measurable デハナイ）トスルトキ、若シ任意ノ $x \in A$ ニ対シテ $x$ ヲ中心トスル半径 $r(x) > 0$ （$r(x)$ ハ $x$ ト共ニ変化スルコトヲ許スモノトス）ノ sphere $S(x) \equiv S(x, r(x))$ ガ對應スレバ、$\{S(x)\}$, $x \in A$ ノウチカラ有限個ノ何レノ二ツモ互ニ共通点ヲモタヌ sphere $S(x_1), S(x_2), \cdots\cdots, S(x_n)$ ヲ選ンデ

$$\sum_{i=1}^{m} m(S(x_i)) > \alpha_m \cdot m^*(A)$$

トナル様ニスルコトガ出來ル。コヽニ $m(S)$ ハ $S$ ノ

measure (即チ volume), $m^K(A)$ ハ A ノ outer measure ヲ表ハシ $\alpha_m > 0$ ハ $R^m$ ノ dimension m ノミニ depend スル constant デアル。

Wiener ハ m 個ノ parameter ノ ergodic theorem ヲ論ジルタメニコノ covering theorem ヲ証明シタノデアル。本談話ニ於テハ先ヅコノ Wiener ノ定理ノ簡単ナ証明ヲ與ヘ、次ニコノ結果ヲ使ツテ Vitali ノ covering theorem ヲ証明シテ見ヨウ。

以下ノ証明ハ Vitali ノ定理ノ証明トシテハ Banach ノ証明 (Saks ノ本ニアルモノ) ヨリ簡単デアルト云ヘナイガ Wiener ノ定理ト Vitali ノ定理トノ関係ガツクノデ興味ガアルト思フ。

Wiener ノ定理ノ証明　アラユル $x \in A$ ニ関スル $r(x)$ ノ上限ヲ $\rho$ トセヨ。$\rho = +\infty$ デアレバ定理ハ明カナル故 $\rho < +\infty$ ト假定スル。$2^{-n}\rho < r(x) \leqq 2^{-n+1}\rho$ ヲ満足スル点 $x$ 全体ヲ $A_n$ ニテ表ハセバ $\{A_n\}$ ($n = 1, 2, \ldots\ldots$) ハ互ニ共通点ナク且ツ $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ デアル。

先ヅ $A_1$ ヲ考ヘレバ $A_1$ ハ有界デ且ツソノ各点ニハ (ソノ点ヲ中心トスル) 半径 $2^{-1}\rho < r(x) \leqq \rho$ ナル sphere $S(x)$ ガ對應シテヰル。今同ジ点 $x$ ヲ中心トスル半徑

$3r(x)$ ノ sphere $S(x,3r(x))$ ヲ $S'(x)$ ニテ表ハスコトニスル。$A_1$ ヨリ有限個ノ点 $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_{n_1}^{(1)}$ ヲトツテ $\{S(x_i^{(1)})\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n_1)$ ガ互ニ共通点ナク且ツ $A_1 \subset \sum_{i=1}^{n_1} S'(x_i^{(1)})$ トナル様ニスルコトガ出來ルコトヲ示サウ。

コレヲ示スタメ先ヅ $x_1^{(1)} \in A_1$ ヲ任意ニトル。次ニ $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots\cdots, x_p^{(1)}$ ガ既ニ定マツタトキ，モシ

$A_1 \subset \sum_{i=1}^{p} S'(x_i^{(1)})$ デナケレバ $x_{p+1}^{(1)} \in A_1 - \sum_{i=1}^{p} S'(x_i^{(1)})$ ヲ任意ニトル。

此ノ如クシテ行ケバ，モシ上ニ述ベタヤウナ $n_1$ ガ存在シナイトスルト，コノ operation ハ無限ニツヅケラレテ $\{x_p^{(1)}\}$ $(p=1,2,\cdots\cdots)$ ガ定マル。

先ヅ任意ノ二ツノ sphere $S(x_p^{(1)})$, $S(x_q^{(1)})$ ガ共通点ヲモタヌコトヲ示サウ。實際 $p<q$ ナルコトヨリ $x_q^{(1)}$ ハ $S'(x_p^{(1)})$ ニハ屬シナイカラ

$$d(x_p^{(1)}, x_q^{(1)}) > 3r(x_p^{(1)}) = r(x_p^{(1)}) + 2r(x_p^{(1)})$$

$$> r(x_p^{(1)}) + 2\cdot\frac{\rho}{2} \geqq r(x_p^{(1)}) + r(r_q^{(1)})$$

ヨツテ $S(x_p^{(1)})$, $S(x_q^{(1)})$ ハ共通点ヲモタナイ。

次ニ上ニ述ベタヤウニ無限ニカヽル $\{x_p^{(1)}\}$ $(p=1,2,\cdots\cdots)$ ガ定マルト假定シテ矛盾ヲ出サウ。任意ノ $p$ ニ對シテ $\{S(x_i^{(1)})\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,p)$ ガ共通点ヲモタヌコトヨリ

$$\sum_{i=1}^{p} m\left(S(x_i^{(1)})\right) = m\left(\sum_{i=1}^{p} S(x_i^{(1)})\right)$$
$$\leqq m\left(\bigcup(A_1, \rho)\right)$$

（但シ$\bigcup(A_1, \rho)$ハ$A_1$トノdistanceガ$<\rho$ナル如キ点全体ノ集合）トナリ右辺ハ$p$ニハ無関係デアル。シカルニ左辺ノ各項ハ半径$r(x_i^{(1)})$ノsphereノvolumeデ$r(x_i^{(1)})>\frac{\rho}{2}$ガ$i=1,2,\cdots\cdots,p$ニ對シテ成立スルカラ$p\to\infty$ナラシムレバ矛盾ヲ生ジル．ヨッテ$n_1$ガ存在シテ

$$A_1 \subset \sum_{i=1}^{n_1} S'(x_i^{(1)})$$

トナル。

此ノ如クシテ所要ノ$\{x_i^{(1)}\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n_1)$ガ見ツカッタ。

次ニ一般ニ$\{x_i^{(k)}\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n_k;\ k=1,2,\cdots\cdots,p)$ガ既ニ定マッテ$\{S(x_i^{(k)})\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n_k;\ k=1,2,\cdots\cdots,p)$ノ任意ノ二ツハ互ニ共通点ヲモタズ，且ツ

$$\sum_{k=1}^{p} A_k \subset \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n_k} S'(x_i^{(k)})$$

トナッテキルモノトセヨ。

$$A'_{p+1} \equiv A_{p+1} - \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{n_k} S'(x_i^{(k)})$$

トオキ$A'_{p+1}$ニ對シテ上ト全ク同ジ議論ヲ行ヘバ（但シ

$x \in A_1$ ニ對シテ $2^{-1}\rho < r(x) \leqq \rho$ トナッテヰタニ反シ，$x \in A'_{p+1}$ ニ對シテハ $2^{-(p+1)}\rho < r(x) \leqq 2^{-p}\rho$ が成立スルコトニ注意）$\{x_i^{(p+1)}\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n_{p+1})$ が定マッテ $\{S(x_i^{(p+1)})\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n_{p+1})$ ノ任意ノ二ツハ互ニ共通点ナク且ツ

$$A'_{p+1} \subset \sum_{i=1}^{n_{p+1}} S'(x_i^{(p+1)})$$

トナル。

然ルニ容易ニワカル如ク $\{S_i^{(p+1)}\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n_{p+1})$ ハ何レモ $\{S(x_i^{(k)})\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n_k;\ k=1,2,\cdots\cdots,p)$ ノ何レトモ共通点ヲモタヌカラ*、コレニヨッテ $\{S(x_i^{(k)})\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n_k;\ k=1,2,\cdots\cdots,p+1)$ が互ニ共通点ヲモタズ，且ツ

$$\sum_{k=1}^{p+1} A_k \subset \sum_{k=1}^{p+1}\sum_{i=1}^{n_k} S'(x_i^{(k)})$$

トナル如キ点 $\{x_i^{(k)}\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n_k;\ k=1,2,\cdots\cdots,p+1)$ が得ラレタ。コノヤリ方ヲ進メバ結局 $\{x_i^{(k)}\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots n_k;\ k=1,2,\cdots\cdots)$ が定マッテ

---

*實際 $x_j^{(p+1)}$ ハ $S'(x_i^{(k)})$ ニ属シナイカラ

$$d(x_i^{(k)}, x_j^{(p+1)}) > 3r(x_i^{(k)}) = r(x_i^{(k)}) + 2r(x_i^{(k)})$$

$$> r(x_i^{(k)}) + 2\cdot 2^{-k}\rho \geqq r(x_i^{(k)}) + r(x_j^{(p+1)})$$

$(k < p+1$ ナル故$)$

$$A \subset \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n_k} S'(x_i^{(k)})$$

トナリ, 且ツ $\{S(x_i^{(k)})\}$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n_k;$ $k=1, 2, \cdots\cdots)$ ハ何レノ二ツモ互ニ共通点ヲモタナイ。

ヨツテ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n_k} m(S(x_i^{(k)})) = \frac{1}{3^m}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n_k} m(S'(x_i^{(k)}))$$

$$\geqq \frac{1}{3^m} m^*(A)$$

故ニ $\alpha_m < \frac{1}{3^m}$ デアレバ十分大キイ $p$ ニ對シテ

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_k} m(S(x_i^{(k)})) > \alpha_m \cdot m^*(A)$$

コレデ Wiener ノ定理ノ証明ガ終ル。

次ニ Wiener ノ定理ヲ用ヒテ次ノ Vitali ノ定理ヲ証明シヨウ。

<u>定理(Vitali).</u> A ヲ $R^m$ 内ノ有界集合(必ズシモ measurable デナイ), $\mathcal{E}=\{E\}$ ヲ $R^m$ ノ閉集合 E ノ family トスル。モシ任意ノ $x \in A$ 及ビ任意ノ $\delta>0$ ニ対シテ $x \in E$, $E \in \mathcal{E}$ ナル閉集合 E 及ビ $E \subset S$, $\delta(S) < \delta$, $m(E) > \alpha\, m(S)$ ナル如キ sphere $S$ ガ存在スレバ(但シ $\delta(S)$ ハ $S$ ノ diameter, $\alpha>0$ ハ点 $x$ ニ無関係ナ常数トス), $\mathcal{E}=\{E\}$ ノウチヨリ可附番個ノ互ニ共通点ナキ閉集合 $\{E_n\}$ $(n=$

$1, 2, \cdots\cdots$) ヲ選ンデ $m\left(A - \sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$ トナル様ニスルコトガ出來ル。

（注意）　Vitali ノ定理ハ A ガ有界デナイトキ及ビ $\alpha = \alpha(x) > 0$ ガ $x$ ニ depend スルトキニ成立スルノデアルガ、上ノ場合ニ定理ヲ証明シテオケバ十分デアル。

<u>証明</u>：　先ヅ $\alpha$ ヲ適當ニカヘレバ上ノ定理ノ條件ニ現ハレル sphere $S$ ガ $x$ ヲ中心ニモツモノデオキカヘ得ラレルコトニ注意スル。實際 $x$ ガ $S$ ノ中心ニナツテヰナイトキハ（$x$ ガ $S$ ノ内点ナルコトヨリ）$S \subset S'$ デ $\delta(S') < 2\delta$ ナル如キ $x$ ヲ中心トスル sphere $S'$ ヲ作ルコトガ出來ル。ヨツテ $\alpha$ ヲ $\frac{\alpha}{2^m}$ デオキカヘレバ $S$ ノ中心ガ $x$ デアルト考ヘテ差支ヘナイ。

先ヅ $A_1 = A$ トオキ $A_1$ ノ各点 $x$ ニ對シテ $x \in E(x)$, $\dot{E}(x) \in \mathcal{E}$ ナル開集合 $E(x)$ ト $E(x) \subset S(x)$, $m(E(x)) > \alpha\, m(S(x))$ ナル sphere $S(x)$ トヲ對應セシメル。Wiener ノ定理ニヨリ $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots\cdots, x_{n_1}^{(1)}$ ガ定マツテ $\{S(x_i^{(1)})\}$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, n_1)$ ハ何レノ二ツモ互ニ共通点ヲモタズ、且ツ

$$\sum_{i=1}^{n_1} m(S(x_i^{(1)})) > \alpha_m \cdot m^*(A_1)$$

デアル。明カニ $\{E(x_i^{(1)})\}$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, n_1)$ ハ互ニ共通点ヲモタナイ。

次ニ一般ニ $\{E(x_i^{(k)})\}$, $\{S(x_i^{(k)})\}$ ($i=1, 2, \cdots\cdots, n_k$; $k=1, 2, \cdots\cdots, p$) ガ既ニ定義サレタトキ、$A_{p+1}=A-\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_k}E(x_i^{(k)})$ トオク. $A_{p+1}$ ノ各点ハ開集合 $\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n_k}E(x_i^{(k)})$ ト positive distance ヲモツカラ各々ノ $x\in A_{p+1}$ ニ對シテ $x\in E(x)$, $E(x)\in\mathcal{E}$ ナル開集合 $E(x)$ ト $E(x)\subset S(x)$, $m(E(x))>\alpha m(S(x))$。$S(x)\cdot E(x_i^{(k)})=\Lambda$ ($i=1, 2, \cdots\cdots, n_k$; $k=1, 2, \cdots\cdots, p$) ナル sphere $S(x)$ トヲ對應セシメルコトガ出來ル。

コノ $S(x)$ ノ system ニ對シテ再ビ Wiener ノ定理ヲ用フレバ有限個ノ $A_{p+1}$ ノ点 $x_1^{(p+1)}$, $x_2^{(p+1)}$, $\cdots\cdots$, $x_{n_{p+1}}^{(p+1)}$ ヲ選ンデ $\{S(x_i^{(p+1)})\}$ ($i=1, 2, \cdots\cdots, n_{p+1}$) ハ何レノ二ツモ互ニ共通点ナリ且ツ

$$\sum_{i=1}^{n_{p+1}}m(S(x_i^{(p+1)}))>\alpha_m\cdot m^k(A_{p+1})$$

トナルヤウニスルコトガ出來ル。コノ operation ハアル $p$ ニ對シテ $A_{p+1}$ ガ空集合ニナラナケレバイクラデモツヾケルコトガ出來ル。$A_{p+1}$ ガ空集合ニナレバ定理ハ明ラカニ成立スルカラ, コノ operation ハ無限ニツヾケラレルト假定シテ差支ナイ。

$\{E(x_i^{(k)})\}$ ($i=1, 2, \cdots\cdots, n_k$; $k=1, 2, \cdots\cdots$) ハ明カニ互ニ共有点ヲモタナイ。ヨツテ

$$m(A-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n_k}E(x_i^{(k)}))=0$$

トナルコトヲ証明スレバ定理ノ証明ハ完結スル，コノタメニハ $k\to\infty$ ナルトキ $m^*(A_k)\to 0$ トナルコトヲ示セバ十分デアル。シカルニ $\{E(x_i^{(k)})\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n_k;\ k=1,2,\cdots\cdots)$ ハ互ニ共通点ヲモタヌコトヨリ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n_k} m(S(x_i^{(k)}))$$

$$\leqq \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n_k} m(E(x_i^{(k)}))<\infty$$

ヨッテ $\lim\limits_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k} m(S(x_i^{(k)}))=0$. 即チ $m^*(A_k)\to 0$ ガ得ラレル。（証明終）