# 820. V. Šmulian: Banach 空間ノ Principle of inclusion ニ就イテ, I

樋口　順四郎（阪大）

Banach 空間 E ガ regular (reflexive トモ呼バレル) ナタメノ條件ヲ求メルコトハ多クノ人ニヨッテ試ミラレテキル。[1] シカシ未ダ完全ニ解決ガツイタトハ言ヘヌ様ニ思ハレル。今ココニ紹介スル V. Šmulian ノ論文 O prinčipe vkladok v prostranstve tipa (B) (On the principle of inclusion in the space of the type (B)). Recueil Math. 5 (1939) 317—327. モ regularity ノ條件ヲ論ジテキルガ, 結果モ, 方法モ D. Milman ノソレ[2] ニ比シテ本質的ナ前進ヲナシタワケデハナイ。議論カラ transfinite ナ考ヘヲナルベク除クコトハ好マシイコトデアルガ、コノ論文ハ transfinite ニ終始スル。

---

(1) 角谷静夫氏ノ談話 785. 参照

(2) D. Milman: On some criteria for the regularity of spaces of the type (B) C. R. URSS. 20 (1938)

II. $\vartheta$ ハ常ニ直前ノ数ヲ持タヌ任意ノ超限数ヲ表ハスト約束スル。transfinite sequence $\{x_\xi\}$ ($1\le\xi<\vartheta$) ガ與ヘラレタトキ，アル所カラ先ノ elements ヲ含ム convex, closed set ノ何レニモ含マレルヤウナ element $x_0$ ガアレバ $\{x_\xi\}$ ハ $x_0$ ニ $\vartheta$-converge スルト云フ。（記号デ $x_\xi \xrightarrow{\vartheta} x_0$）集合 $\mathfrak{M}\subset E$ ノ element ノ任意ノ sequence $\{x_\xi\}$ ガアレバ，ソレニ対シテ $x_\xi \xrightarrow{\vartheta} x_0$ トナル $x_0\in E$ ヲ見出セルトキニ $\mathfrak{M}$ ハ $\vartheta$-complete デアルト云フ。

Lemmas ヲ順次ニ片ヅケル。

$\boxed{\text{Lemma 1}}$ $\{x_\xi\}$ ($1\le\xi<\vartheta$) ハ convex, closed set K ニ属スル点ノ transfinite sequence トスル。モシスベテノ $f\in\overline{E}$ ニ対シ

$$\underline{\lim}_{\xi\to\vartheta} f(x_\xi)\le f(x_0)\le \overline{\lim}_{\xi\to\vartheta} f(x_\xi)$$

ヲミタス $x_0$ ガ存在スレバ $x_0\in \underline{K}$.

証: $x_0 \overline{\in} K$ トスレバ，内点ヲ有シ且ツ $x_0$ ヲ含マヌ convex, closed set $K'\supset K$ ヲ見出セル。$\theta$ ハ $K'$ ノ内点ト考ヘ得ル。然ルトキハ $t_0$, $0<t_0<1$ ガ存在シテ $t_0x_0$ ガ $K'$ ノ境界上ニ来ル。$t_0x_0$ ヲ通ル $K'$ ノ Stützhyperebene ヲ $f_0(x)=1$ トスルト $f_0\in\overline{E}$ デ $x\in K'$ ニ対シテハ $f_0(x)\le 1$[(2)]. 従ツテ

$$f_0(x_0)\le\overline{\lim}\, f_0(x_\xi)\le 1$$

脚註(2) 次頁ヘ

一方カラ $f_0(t_0x_0)=1$, $f_0(x_0)=\frac{1}{t_0}>1$ （矛盾）

$\boxed{\text{Lemma 2}}$ スベテノ $f\in\overline{E}$ ニ對シテ

$\underline{\lim}_{\xi\to\vartheta} f(x_\xi)\leq f(x_0)\leq \overline{\lim}_{\xi\to\vartheta} f(x_\xi)$ トナルタメノ完全條件

ハ任意ノ $\varepsilon_0>0$, $\xi_0<\vartheta$ ニ對シテ

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} \mu_i x_{\xi_i} - x_0 \right\| < \varepsilon_0 \tag{1}$$

トナル linear combination $\sum_{i=1}^{N} \mu_i x_{\xi_i}$ ($N>0$, $\mu_i\geq 0$, $\sum^{N} \mu_i=1$, $\xi_i\geq\xi_0$) が存在スルコトデアル。

證: "必要" ハ明ラカ（$\xi\geq\xi_0$ デアル $x_\xi$ ノスベテヲ含ム最小ノ convex, closed set ヲ K トスレバ lemma 1 カラ $x_0\in K$）

"充分" ト云フニハ: アル $f_0$ ($\|f_0\|=1$) ニ對シテ

$\overline{\lim}_{\xi\to\vartheta} f_0(x_\xi)<f_0(x_0)$ ト假定スルト, $\varepsilon_0>0$, $\xi_0<\vartheta$ ガ

アッテ

$$f_0(x_\xi)<f_0(x_0)-\varepsilon_0 \quad \text{for} \quad \xi_0<\xi<\vartheta$$

コノ $\varepsilon_0$, $\xi_0$ ニ對シテ (1) ヲ滿足スル $\sum_{1}^{N}\mu_i x_{\xi_i}$ ヲ作レバ

---

(2) Banach 空間ノ convex set ニツイテハ下記參照。

S. Mazur: Über konvexe Menge in linearen normierten Räume. Studia Math. 4.

$$\varepsilon_0 \geq \left|\sum_1^N \mu_i f_0(x_{\xi_i}) - f_0(x_0)\right| = \left|\sum_1^N \mu_i [f_0(x_{\xi_i}) - f_0(x_0)]\right|$$

$$> \sum_1^N \mu_i \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \quad \text{(終)}$$

Lemmas 1, 2 カラ容易ニ

$\boxed{\text{Lemma 3}}$ $\quad \underline{\lim}_{\xi \to \vartheta} f(x_\xi) \leq f(x_0) \leq \overline{\lim}_{\xi \to \vartheta} f(x_\xi)$

ガスベテノ $f \in \overline{E}$ ニ對シテ成立スルコトト $x_\xi \xrightarrow{\vartheta} x_0$ トハ同値デアル。(3)

$\boxed{\text{Lemma 4}}$ E ノ unit sphere ガ $\vartheta$-complete ナタメノ完全條件ハ有界ナ convex, closed set ノ任意ノ descending transfinite sequence

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_\xi \supseteq \cdots\cdots \quad (1 \leq \xi < \vartheta) \qquad (2)$$

ニ共通ナ点ガ存在スルコトデアル。

証: 〝必要〃 $K_\xi$ ノ勝手ナ element ヲ $X_\xi$ トスル. $\|x_\xi\| \leq 1$ ト考ヘテヨイ。

$\vartheta$-complete ダカラ $X_\xi$ ガ $\vartheta$-conv. スル element $x_0$ ガ存在スル. コノ $x_0$ ハ明カニスベテノ $K_\xi$ ニ共通ナ点デアル。

〝充分〃 $\{x_\xi\}_{\xi < \vartheta}$ $\|x_\xi\| \leq 1$ ガ與ヘラレタ $K_\eta$ ヲ $\eta \leq \xi < \vartheta$ トナル $x_\xi$ ヲ含ム最小ノ conv. closed set トスルト, $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_\xi \supseteq \cdots\cdots \quad (1 \leq \xi < \vartheta)$.

---

(3) S. Mazur: loc. cit. 参照.

ソコデハ weak convergence ガ同様ナコトヲ論ジテアル。

假定カラ，コレニハ共通ナ点 $x_0$ ガアル。$\vartheta$-conv. ノ定義カラ $x_\xi \xrightarrow{\vartheta} x_0$.　　　　　　　　　　(終)

コレラノ Lemmas ト A. Plessner ノ定理[4]，即ナ：E ガ regular ナタメニハ unit sphere $\|x\| \leq 1$ ガ transfinitely closed[5] ナコトガ必要且充分デアル，ヲ使ヘバ次ノ定理ヲウル。

$\boxed{\text{定理 1}}$　E ガ regular ナタメノ完全條件ハ任意ノ有界ナ convex, closed set ノ減少系列

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_\xi \supseteq \cdots\cdots \qquad (1 \leq \xi < \vartheta)$$

ニ共通ナ点ガ存在スルコトデアル。

$\boxed{\text{定理 2}}$　E ガ locally weakly compact ナタメニハ，unit sphere ガ $\omega$-complete ナコトガ必要且充分デアル。コヽニ $\omega$ ハ最初ノ infinite transf. number デアル。

証：　條件ガ必要ナコトハ明ラカデアルカラ充分ナコトヲ証明スレバヨイ。先ヅ E ガ separable ナトキニ証明スル。$\{f_m\}$ ヲ $\bar{E}$ デ weakly dense ナ系列トスル。系列 $\{x_n\}$ $(\|x_n\| \leq 1)$ ノ中カラ適當ニ部分列 $\{x_{n_\nu}\}$ ヲ選ンデ，スベテノ $f_m$ ニツイテ $\lim f_m(x_{n_\nu})$ ガ存在

---

(4)　V. Gantmakher et Šmulian: Sur les espaces linéaires dont la sphère unitaire est faiblement compacte. C.R. URSS. 20 參照.

(5)　$x_0$ ガ存在シテ $(\|x_0\| \leq 1)$ $\underline{\lim}\, f(x_\xi) \leq f(x_0) \leq \overline{\lim}\, f(x_\xi)$ for all $f \in \bar{E}$ トナルコト.

スル様ニデキル。$y_\nu = x_{n_\nu}$ ($\nu = 1, 2, \cdots\cdots$) ト書ケバ、
E ハ $\omega$-complete デアルカラ $y_\nu \xrightarrow{\omega} x_0$ トナル $x_0$
ガ存在スル。コノ $x_0 = y_\nu$ ガ弱收斂スルコトヲ示サウ。モ
シサウデナイトスルト、アル $f_0 \in \bar{E}$ ニツイテ $\{f_0(y_\nu)\}$
ノアル部分列 $\{f(y_{\nu_k})\}$ ガ（有限モシクハ無限ノ）$f_0(x_0)$
トハ等シクナイ極限ヲ持ツトイフコトガ起ル。$z_k = y_{\nu_k}$
($k = 1, 2, \cdots\cdots$) ト書ケバ

$$\lim_k f_m(z_k) = f_m(x_0), \quad \lim_k f_0(z_k) \neq f_0(x_0) \tag{3}$$

假定カラ $z_k \xrightarrow{\omega} x_0'$ トナル $x_0'$ ガ存在スルガ、コノ $x_0'$
ニ對シテ

$$f_m(x_0') = \lim_{k \to \infty} f(z_k) = f_m(x_0) \qquad (\text{by } (3))$$

$$f_0(x_0') = \lim_k f_0(z_k) \neq f_0(x_0) \tag{4}$$

$\{f_m\}$ ハ weakly dense ニトツテアルカラ (4) ハ矛
盾デアル。

E ガ separable デナイ場合ニハ $\{x_n\}$ ノ張ル
closed linear hull ヲ $E_1$ トスレバ $E_1$ ハ se-
parable subspace デ、$\omega$-completeness ハ保存
サレル。故ニ $\{x_n\}$ ハ $E_1$ デ weakly compact、從
ツテ又 E デモ weakly compact デアル。（終）
コノ定理ト Lemma 4 トカラ直チニ

$\boxed{\text{定理3}}$ E ガ locally weakly compact
ナタメニハ有界 convex, closed sets ノ減少可附番

系列

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_n \supseteq \cdots\cdots$$

ニ共通ナ点ガ存在スルコトガ必要且ツ充分デアル。

$\boxed{\text{注意}}$ 定理1,3カラ直チニ次ノコトガ分ル。

《regular ナBanach空間ハlocally weakly compactデアル》(6)

又separableナ距離空間デハ閉集合ノ整列単調系列ハ高々可附番系列ニナル(Baireノ定理)カラ次ノ事モ言ヘル訳デアル。

《Eガseparableナラregularityトlocally weakly compactnessハ同値デアル》(7)(Banachノ定理)

一般ノBanach空間デregularityトlocally weakly compactnessトガ同値ニナルカ否カト云フコトハ未解決デアルガコレハ重要ナ問題デアル。

II. regularityニ関スル結果ハ定理ノデツキテヰルガ, Šmulianハ更ニ次ノ定理(定理5)ヲ述ベテヰル。内容ニ於テハD. Milmann(8)ノソレト同ジデアル。

$\varphi(K)$ハ有界ナ内点ヲ有スルconvex set Kニ對應スル數トシ $\varphi(K) \geq 0$ 且ツ單調トスル。ソノヤウナ $\varphi$ ノ

---

(6) Gantmakher et Šmulian: loc. cit.

(7) 角谷氏談話785. 定理3.

(8) D. Milmann. loc. cit

一例ハ後デ述ベル。

$\boxed{\text{定理4}}$ Eガ locally weakly compact ナラ，アル $\vartheta$ ニツイテ $\varphi(K_1)=\varphi(K_2)=\cdots\cdots=\varphi(K_\xi)=\cdots$ $\cdots$トナルヤウナ有界ナ convex closed set ノ任意ノ transf. sequence

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_\xi \supseteq \cdots\cdots \qquad (1 \leq \xi < \vartheta) \qquad (5)$$

ニ共通ナ点ガアルコトガ E ノ regular ナタメノ必要且充分ナ條件デアル。

証： 必要ナコトハ勿論デアル．充分ナコトヲ証明スルニハ，何ラノ制限ノナイ (5) ノ形ノ sequence ニ共通点ガアルコトヲ言ヘバヨイ。

$\vartheta$ ガ $\xi_1 < \xi_2 < \cdots\cdots < \xi_n < \cdots\cdots$ デアル様ナ $\{\xi_n\}$ ノ極限トシテ定義サレテヰル場合ニハ locally weakly compact ノ假定カラ

$$K_{\xi_1} \supseteq K_{\xi_2} \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_{\xi_n} \supseteq \cdots\cdots$$

ハ共通ナ点ガ存在スル。

$\xi$ ヲ極限トスル $\{\xi_n\}$ ガ存在シナイ場合ニハ $\lim_{\xi \to \vartheta} \varphi(K_\xi) = \varphi_0$ トオケバ，適当ナ $\xi_1$ ガ定マッテ $\xi > \xi_1$ ナラ $|\varphi(K_\xi) - \varphi_0| < 1$ トナル．一般ニ $\xi_n$ ガキマッテ $\xi > \xi_n$ ナラ $|\varphi(K_\xi) - \varphi_0| < \frac{1}{n}$ トナル。$\lim \xi_n = \xi_0$ トスルト $\varphi$ ハ単調デアルカラ $\xi > \xi_0$ ナラ $\varphi(K_\xi) = \varphi_0$ トナル．故ニコノトキ

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_\xi \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_{\xi_0} \supseteq \cdots\cdots$$

ニハ共通ナ点ガアル。　　　（終）

次ニ $Q$ ヲ $\theta$ ヲ内点ニ持ツ convex closed set トスル。$q(x)$ ヲ $Q$ ノ境界上デハ $1$ ニナリ任意ノ $x$ ニ對シテハ $q(tx) = t\,q(x)$ $(t \geq 0)$ トナル functional トスル（例ヘバ Minkowski ノ functional）$q(x)$ ハスベテノ $x \in E$ デ意味ヲモツ。

$$\varphi(K) = \operatorname*{fin}_{x \in K} q(x) \qquad (6)$$

ト定義スルト $\varphi(K) \geq 0$、$K_1 \supseteq K_2$ ナラ $\varphi(K_1) \leq \varphi(K_2)$ トナル。

$\boxed{\text{定理5}}$　E ハ locally weakly compact, Q ハ上述ノ通リトスル. E ガ regular ナタメニハ Q ノ境界上ノ有界ナ convex closed set ノ任意ノ減少系列

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_\xi \supseteq \cdots\cdots \qquad (1 \leq \xi < \vartheta)$$

ニ共通ナ点ガ存在スルコトガ必要且充分デアル。

証：必要ナコトハ勿論、充分ナコトハ，有界ナ convex, closed set ノ sequence

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_\xi \supseteq \cdots\cdots \qquad (1 \leq \xi < \vartheta) \qquad (7)$$

ガ共通ナ点ヲモツコトヲ言ヘバヨイ。明ラカニ $\theta \bar{\in} K_1$ ト仮定シテヨイ。ソノトキハ (6) デ定義シタ $\varphi$ ニツイテ

$0 < \varphi(K_1) \leq \varphi(K_2) \leq \cdots\cdots$ デアルガ (7) ニ於テハ

$\varphi(K_1) = \varphi(K_2) = \cdots\cdots = \varphi(K_\xi) = \cdots\cdots = 1$ ト仮定シテヨイ（定理4）$\varphi(K_\xi) = 1$ カラ $K_\xi \cdot Q = K'_\xi \neq \Lambda$

デアル、仮定カラ

$$K_1' \supseteq K_2' \supseteq \cdots\cdots \supseteq K_\xi' \supseteq \cdots\cdots$$

ニハ共通ナ点ガ存在スル。即チ(ワ)ニハ空デナイ共通部分ヲ持ツ。 (終)