819. Markoff Process with stationary uniform distribution

吉田　耕作（阪大）

$(0, 1)$ ノ点 x が単位時間ノ後ニ $(0, 1)$ ノ点 y ニ移ル遷移確率ヲ $p(x, y)$ トシ，$p(x, y)$ ニ依ッテ定義サレル simple ナ Markoff chain ヲ考ヘル：即チ n 単位時間ノ後ニ点 x が点 y ニ移ル遷移確率 $p^{(n)}(x, y)$ が $(n=1, 2, \cdots\cdots)$

$$(1)\quad p^{(n)}(x, y)=\int_0^1 p^{(n-1)}(x, z)\,p(z, y)\,dz$$

$$\left(p^{(1)}(x, y)=p(x, y)\right)$$

ニヨッテ與ヘラレル transition process ヲ考ヘルノデアル。勿論 analysis ヲ遂行スルタメニ $p(x, y)$ ハ $0 \leqq x, y \leqq 1$ デ可測ト假定シテヲク。定義カラ

$$(2)\quad p^{(n)}(x, y) \geqq 0 \qquad \text{且ツ} \int_0^1 p^{(n)}(x, y)\,dy \equiv 1$$

$$(n=1, 2, \cdots\cdots)$$

以下ニハ

$$\boxed{(3)\quad \int_0^1 p(x, y)\,dx \equiv 1}$$

ヲ假定スル。從ッテ勿論

$$(3')\quad \int_0^1 p^{(n)}(x, y)\,dx \equiv 1 \qquad (n=1, 2, \cdots\cdots)$$

表題ニ with stationary uniform distribution トシ述ベタノハ (3) ガ満足サレテヰルト云フ意味デアル。ソノ理由ヲ次ニ述ベヨウ。non-negative ナ $f(x)$ ガ $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ ヲ満足スルナラバ f ハ $(0,1)$ ノ上ニ total mass 1 ノ mass distribution ヲ定義シテヰルト考ヘテヨイ。n 單位時間後ニハコノ mass distribution ハ $f^{(n)}(y) = \int_0^1 f(x)\,p^{(n)}(x,y)\,dx$ ナル mass distribution ニナル訳デアリ，(3) ハ uniform ナ mass distribution $f(x) \equiv 1$ ガ時間ニ對シテ stationary (or steady)：$f = f^{(n)}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ト云フコトヲ意味スル。(3) ハ ~~對稱條件~~

$$p(x,y) \equiv p(y,x)$$

ガ満サレテヰレバ，(2) ニヨリ，確カニ成立ツ。斯カル遷移確率ノ對稱性ハ量子統計力學ニ於テハ常ニ假定スル所ト云フ事デアリマス。

本談話デハ次ノ結果ヲ証明シタイ。

$\boxed{\text{定理1}}$ (3) ヲ満足スル $p(x,y)$ ニ対シテハ Mean ergodic theorem ガ成立スル。即チ $(0,1)$ デ可積分ナ任意ノ $f(x)$ ニ對シテ同ジク $(0,1)$ デ可積分ナ $f^*(x)$ ガ定リ

$$(4)\quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1\left|\int_0^1 f(x)\left\{\frac{1}{n}\sum p^{(m)}(x,y)\right\}dx - f^*(y)\right|dy = 0$$

若シ f ガ non-negative 且ツ

$$(5)\quad \int_0^1 f(x)\,dx = 1.$$

$$\int_0^1 f(x)\log f(x)\,dx = finite$$

トスレバ

$$(6)\quad \int_0^1 H\left(f^{(1)}(x)\right)dx \geqq \int_0^1 H\left(f^{(2)}(x)\right)dx$$

$$\geqq \cdots\cdots \geqq \int_0^1 H\left(f^{(n)}(x)\right)dx \geqq \cdots\cdots$$

$$(7)\quad H(Z) = Z\cdot\log Z.$$

定理 2 (3) ノ他ニ

$$(8)\begin{cases} \text{或整数 } m \text{ ニ對シテ } \underset{0\leqq x\leqq 1}{g.l.b.}\, p^{(m)}(x,y) = p^{(m)}(y) \\ \text{ガ可測, 且ツ } \int_0^1 p^{(m)}(y)\,dy > 0 \end{cases}$$

ヲ假定スルナラバ

$$(9)\quad \underset{f}{l.u.b.}\int_0^1 \left| f^{(n)}(x) - 1 \right| dx \leqq \frac{2}{(1+\varepsilon)^n}$$

$$(n = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナル如キ正數 ε ガ定ル。コヽニ $\underset{f}{l.u.b.}$ ハ non-negative 且ツ $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$ ナル如キ全テノ f ニ對スル l.u.b. ヲ示ス。

注意 1. 擴張サレタ symmetry condition (3) ノ他ニ ミカケ上ハ $p(x, y)$ ノ regularity ニ關シテ何モ假定シナイデ M.E.T. ガ成立ツコトハ一寸面白イト思ヒ

マス。角谷君ニ之ヲオ話シタ所，J. L. Doob ノ論法（Trans. Am. Math. Soc. 44, 1 (1938)）ヲ modify スレバ

$$\int_0^1 f(x)\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} p^{(m)}(x,y)\,dx$$

ノ弱収斂ガ出ルコト従ツテ M.E.T. ニヨツテ強収斂ガ出ルコトヲ注意サレタ。所ガ Doob ノ論法ナルモノハ無限次ノ積空間ヲ作リ此所デ Birkhoff ノ ergodic theorem ヲ使フノデアル。無限次ノ積空間ヲ作ルノハ B.E.T. ニ於ケル measure preserving ナ変換（従ツテ inverse ガ存在ス）ヲ考ヘ得ンガタメデアル。結局 M.E.T. ヲ使フナラバ定理 1 ノ証明（以下ニ述ベル）ノ如ク直接 M.E.T ヲ使ツタ方ガ早イ様デアリマス。

$\boxed{\text{注意}}$ 2. 條件 (8) ハ一種ノ irreducibility ト考ヘテヨイ。即チ (0, 1) ガ二ツノ部分 A, B ニ分レテ

$x \in A,\ y \in B$ 又ハ $x \in B,\ y \in A$ ナルトキ

$$p(x,y)=0$$

ト假定スレバ (8) ハ満足サレナイノデアリマス。

$\boxed{\text{注意}}$ 3. $\int_0^1 f(x)\,dx = 1,\ \int_0^1 f(x)\log f(x)\,dx =$ finite ナル non-negative ナ $f(x)$ ヲ $x \in (0,1)$ ノ weight ト考ヘ，各 $x \in (0,1)$ ハ或 physical system ノ possible state ヲ表ハスモノトスル。stationarity ト irreducibility ト（(3) ト (8) ト）

ヲ假定スルナラバ n 單位時間後ノ weight $f^{(n)}(x)$ ハ、initial weight $f(x)$ ノ如何ニ関ラズ、uniform weight ニ(6)及ビ(9)ヲ満足スル如ク收斂スル。之レガ定理1, 2カラ言ヘテヲル訳デ、Gibbs ノH－定理ノ一ツノ解釈ガ Markoff chain ヲ用ヒテ與ヘラレタト考ヘ得ヤウト思ヒマス。

$\boxed{\text{定理1ノ証明}}$ (0, 1) ヲ可積分ナ函数 $f(x)$ ノ作ル Banach 空間ヲ (L) トシマス：$\|f\|=\int_0^1|f(x)|dx$. $p(x, y)$ ガ (L) ノ (L) 内ヘノ norm 1 ノ線型作用素T：

$$T\cdot f=g,\quad g(y)=\int_0^1 f(x)\,p(x,y)\,dx$$

ヲ定メルコトハ、Fubini－Tonelli ノ定理ニヨリ

$$\int_0^1 dy\left|\int_0^1 f(x)\,p(x,y)\,dx\right|\leqq\int_0^1 dx\int_0^1|f(x)|\,p(x,y)\,dy$$

$$=\int_0^1|f(x)|\,dx$$

カラ明ラカデアリマス。又(3)ニヨレバTハ(L)ノ中ノ有界可測ナ函数 $f(x)$ ヲ同ジク有界可測ナ函数ニ寫シ然モ $\operatorname*{ess.max}_x|f(x)|\geqq\operatorname*{ess.max}_x|f^{(n)}(x)|$. ヨツテ有界且可測ナ $f(x)$ ニ對シテハ

$$f_n=\frac{T+T^2+\cdots\cdots+T^n}{n}\cdot f$$

ハ equi-bounded 從ッテ equi-integrable. 故ニ Lebesgue-Riesz ノ定理ニヨリ $\{f_n\}$ ハ (L) ノ或ル点 f^* ニ弱收斂スル部分列 $\{f_{n_i}\}$ ヲ含ム。然ラバ M.E.T. ニヨリ,[1] $\{f_n\}$ ハ f^* ニ<u>強收斂</u>スル。故ニ有界可測ナ f ニ對シテハ (4) ガ成立スル。所ガ (L) ノ中デ有界可測ナ函數ハ strongly dense ダカラ T ノ norm 1 ト云フコトカラ全テノ $f \in (L)$ ニ対シテ (4) ガ成立スルコトガ云ヘル。

<u>次ニ (6) ノ證明</u>. f, p ガ全テ連續函數ナルトキハ (3) ト $H(z)$ ノ凸函數ナルコトヲ用ヒ

$$\int_0^1 H(f(x))\,p(x,y)\,dx \geqq H\left\{\int_0^1 f(x)\,p(x,y)\,dx\right\}$$

之ヲ y ニ関シテ積分シ, (2) ヲ用ヒルト

$$\int_0^1 H(f(x))\,dx \geqq \int_0^1 H(f^{(1)}(x))\,dx,$$

即チ, コノ場合ノ (6) ガ得ラレタ。一般ノ場合ハ limit ニモッテ行ッテ出来ルカラ略ス。普通ノ教科書ニハ Lebesgue integral ニ関シテ凸函數ノ諸性質ヲ出シテナイ様デアルカラ、チヤントヤッテミナケレバナラナイケレドモ

---

(1) M.E.T. ノ証明 (談話　　) ヲミレバ $\|T^n\| \leqq$ 常數 ($n = 1, 2, \cdots\cdots$) ナルトキ, <u>或 f ニ對シ</u> $\left\{\dfrac{T + \cdots\cdots + T^n}{n} \cdot f\right\}$ ガ或 f^* ニ弱收斂スル部分列ヲ含メバ $\dfrac{T + \cdots\cdots + T^n}{n} f$ ガ f^* ニ強收斂スルト云フ結果ガ得ラレルコトガワカル。

$\boxed{\text{定理２ノ証明}}$　先ヅ

$$(10)\begin{cases}\displaystyle\int_0^1\left|f^{(m)}(y)-1\right|dy \leqq (1-\alpha)\int_0^1\left|f(x)-1\right|dx \leqq 2(1-\alpha)\\[2ex] \displaystyle\alpha=\int_0^1 p^{(m)}(y)\,dy\ (>0\ \text{By}\ (8))\end{cases}$$

ガ得ラレル。何者，$f(x)\geqq 0$，$\int_0^1 f(x)\,dx=1$ 及ビ (3) ニヨリ

$$\int_{f(x)\geqq 1}(f(x)-1)\,dx=-\int_{f(x)<1}(f(x)-1)\,dx,$$

$$f^{(m)}(y)-1=\int_0^1 f(x)p^{(m)}(x,y)\,dx-1=\int_0^1(f(x)-1)p^{(m)}(x,y)\,dx$$

$$=\int_{f(x)\geqq 1}(f(x)-1)p^{(m)}(x,y)\,dx+\int_{f(x)<1}(f(x)-1)p^{(m)}(x,y)\,dx$$

ヲ得ルカラ

$$\int_{f(x)<1}(f(x)-1)(p^{(m)}(x,y)-p^{(m)}(y))\,dx\leqq f^{(m)}(y)-1$$

$$\leqq\int_{f(x)\geqq 1}(f(x)-1)(p^{(m)}(x,y)-p^{(m)}(y))\,dx.$$

之レヲ y ニツイテ積分シ (2) ト α ノ定義カラ (10) ヲ得ル。

(10) ヲ繰返シテ

$$\int_0^1\left|f^{(nm)}(x)-1\right|dx\leqq 2(1-\alpha)^n\qquad(n=1,2,\cdots\cdots)$$

故ニ (2), (3) ニヨリ (9) ヲ得ル。

—— 以上 ——