817. P. Levy ノ定理ノ直接ナ証明
(by G. Ottaviani)

吉田　耕作（阪大）

P. Levy ノ定理　互ニ独立ナ variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ ノ和 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ガ $n \to \infty$ ナルトキ確率收斂[1] スルナラバ実ハ殆ド確実ニ收斂スル。[2]

(脚註次頁ヘ)

コノ *Levy* ノ定理ハ所謂 *probabilités dénombrables* ニ於ケル基本定理デアリ, *Levy* 自身ノ証明ハ彼ノ書物 *Théorie de l'addition des variables aléatoires* (1937) p. 139 ニ載ッテヲル。彼ノ<u>散縮度増加ノ原理</u>[(3)] ニヨリ *Kolmogoroff* ノ不等式[(4)] ヲ拡張シナガラノ証明ハ誠ニ鮮カデアルケレドモ一寸仰々シスギルシ, 從ッテ又<u>定理ノカラクリ</u>モワカリ難イ。重要ナ定理デアル丈ケニ永々氣ニ掛ッテ居ッタノデスガ, 最近著ノ *Giorn. d. Ist. ital. d. Attuari* 誌 (X, 1–2) ニ *G. Ottaviani* ノ証明ヲ見付ケマシタ。文字通リノ <u>*one page proof*</u> デアリ, 問題ニ直接ブッカッテミル事ガ大切ナコトヲ筆者ハ教ヘラレマシタ。兎ニ角コレデ *Levy* ノ定理ノカラクリガハッキリシマシタカラ証明ヲ記録シテヲクノモ無駄デハナイト信ジマス。

variables aléatoires デハワカリ難イカラ *Lebesgue* 積分ノ言葉ニ飜譯シマスト定理ハ次ノ如クナル訳デス。

<u>定理</u>. $(0, 1)$ デ可測ナ函数 $f_1(t), f_2(t), \cdots\cdots, f_n(t), \cdots\cdots$ ガ<u>独立函数系</u>[(5)] ヲ作ルトキニ $\sum_{i=1}^{n} f_i(t)$ ガ $n \longrightarrow \infty$ ナ

(脚註5ハ次頁へ)

---

(1) *converge in probability*

(2) *converge almost certainly* (?)

(3) 北川敏男氏ノ譯

(4) *Levy* 前掲書, P. 141

ルトキ漸近收斂[6]スルナラバ，実ハ殆ド全テノ t デ收斂スル。

証明　$a<b$, $r \leqq n$ トシ $E_{rn}(a,b)=\underset{t}{E}\left\{a \leqq \sum_{i=r}^{n} f_i(t) \leqq b\right\}$ ト置ク。先ヅ漸近收斂ト云フ假定カラ任意ノ $\delta>0$, $\varepsilon>0$ ニ對シ r_0 ヲ充分大キクトレバ

$$(1) \quad mes\left\{E_{rn}\left(\frac{-\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} \geqq 1-\delta \quad \text{for } r_0 \leqq r \leqq n$$

所ガ明カニ

$$\sum_{m=r}^{n-1}\left\{\left(\prod_{i=r}^{m-1} E_{ri}(-\infty,\varepsilon)\right)\cdot E_{rm}(\varepsilon,\infty)\cdot E_{m+1,n}\left(\frac{-\varepsilon}{2},\infty\right)\right\}$$
$$\subseteqq E_{rn}\left(\frac{\varepsilon}{2},\infty\right).$$

左辺ノ $\{\ \}$ ニ於テ $E_{m+1,n}\left(\frac{-\varepsilon}{2},\infty\right)$ ハ (1) ニヨリ $mes \geqq 1-\delta$

ヨッテ独立ノ假定カラ

$$(1-\delta)\, mes\left\{\sum_{m=r}^{n-1}\left[\prod_{i=r}^{m-1} E_{ri}(-\infty,\varepsilon)\right]\cdot E_{rm}(\varepsilon,\infty)\right\}$$
$$\leqq mes\, E_{rn}\left(\frac{\varepsilon}{2},\infty\right).$$

左辺ノ括弧 $\{\ \}$ ノ中ハ少クトモ一ツノ $i\ (r \leqq i \leqq n)$ ニ對

---

(5) 任意ノ n ト $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ ニ對シ $\underset{t}{mes}\{a_1 \leqq f_1(t) \leqq b_1, \cdots\cdots, a_n \leqq f_n(t) \leqq b_n\} = \prod_{i=1}^{n} mes\{a_i \leqq f_i(t) \leqq b_i\}$.

ガ成立ツコト。

(6) asymptotic convergent

シ $\sum_{j=r}^{i} f_j(t) \geqq \varepsilon$ ナル如キ t ノ集合 $e_{rn}(\varepsilon, \infty)$ ヲ表ハス。

即チ

$$(1-\delta)\, mes\,(e_{rn}(\varepsilon,\infty)) \leqq mes\, E_{rn}\left(\frac{\varepsilon}{2}, \infty\right)$$

同様ニ $(1-\delta)\, mes\,(e_{rn}(-\infty,-\varepsilon) \leqq mes\, E_{rn}\left(-\infty, \frac{-\varepsilon}{2}\right)$

ヨツテ全テノ $i\,(r \leqq i \leqq n)$ ニ對シ $-\varepsilon \leqq \sum_{j=r}^{i} f_j(t) \leqq \varepsilon$ ナル

t ノ集合ヲ $e'_{rn}(-\varepsilon,\varepsilon)$ トスレバ（$r_0 \leqq r \leqq n$ ナルトキ）

$$mes\; e'_{rn}(-\varepsilon,\varepsilon) = 1 - mes\left\{e_{rn}(\varepsilon,\infty) + e_{rn}(-\infty,-\varepsilon)\right\}$$

$$= 1 - mes\; e_{rn}(\varepsilon,\infty) - mes\; e_{rn}(-\infty,-\varepsilon)$$

$$\geqq 1 - \frac{1}{1-\delta}\, mes\left\{E_{rn}\left(\frac{\varepsilon}{2},\infty\right)\right\} + mes\, E_{rn}\left(-\infty,\frac{-\varepsilon}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{1-\delta}\, mes\left\{E_{rn}\left(\frac{\varepsilon}{2},\infty\right) + E_{rn}\left(-\infty,-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$$

$$\geqq 1 - \frac{1}{1-\delta}\left\{1-(1-\delta)\right\} \quad by\ (1)$$

ε, δ ハ任意ダツタカラ證明了リデアル。