816. non-negative matrix ノ固有値ニツイテ

角谷 静夫（阪大）

$\boxed{\text{定理}}$ Matrix $P=(p_{ij})$, $i,j=1,2,\cdots\cdots,N$, ノ element p_{ij} ガスベテ non-negative デ且ツ P ノ固有値ノ絶對値ノ最大値ガ1デアレバ $|\lambda|=1$ ナル P ノ固有値ハスベテ $\lambda^n=1$ ヲ満足スル。但シ n ハ正ノ整数デアル。

コノ定理ハ Markoff chain ノ理論ヨリ予想サレルモノデアル。實際 $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}=1$ ガ $i=1,2,\cdots\cdots,N$ ニ対シテ成立スルトキハ P ハ Markoff chain ノ transition matrix トナルカラ、コノ定理ハ良ク知ラレタ結果トナル。更ニ、P ヲ completely continuous ナ positive linear operation ト考ヘレバ $\|P^n\|\leqq C$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ナル如キ constant C ガ存在スルトイフ條件ガアレバ、コレハ前々号（186号 807）デ得タ結果ヨリ直チニ得ラレル。

シカシ P ノ固有値λガスベテ $|\lambda|\leqq 1$ ヲ満足シテヰテモ、必ズシモ $\|P^n\|\leqq C$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ナル如キ constant C ハ存在シナイカラ（例ヘバ matrix $P=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ ヲ考ヘレバ $P^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$ トナル）。コノ定理ハ別ニ証明ヲヤリ直ス必要ガアル。

コノ定理ハ先日彌永、小平、安倍三氏トノ談話ニテ

豫想サレタモノデアリマス。以下ノ証明中 matrix P^* ヲ考ヘルノハ小平氏ノ考ヘニヨルモノデアリ、Fixpunktsatz ヲ用ヒルノハ安倍氏ノ考ヘニヨルモノデアリマス。コノ二氏ニ対シテ深ク感謝致シマス。

尚ホ、後デ文献ヲシラベテ見ルト、全ク同ジ定理ガ Frobenius ニヨッテ既ニ1912年ニ得ラレテ居ルコトガワカッタ。(Sitzungsberichte, Berlin)

Frobenius ノ証明ハ相當面倒デアリ、且ツ我々ノ方法ハ Markoff chain ノ問題ニ reduce シテ証明スルノデアルカラ、以下ノ証明ハ興味ガアルト思フ。*)

$\boxed{\text{証明}}$ 先ヅ $|\lambda|=1$ ナル P ノ固有値 λ ガ存在スレバ $\lambda=1$ ハ又 P ノ固有値トナリ、且ツ $P(x)=x$.（即チ $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}x_j=x_i$, $i=1, 2, \cdots\cdots, N$）ナル如キ positive vector $x=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_N)$, $x_i \geqq 0$ ($i=1, 2, \cdots\cdots, N$)（且ツ少クトモ一ツノ $x_i>0$）ガ存在スルコトガワカル。何トナレバ $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\xi_j=\lambda\xi_i$,

*) Frobenius ハ更ニ絶対値1ノ固有値 λ ハ $(\lambda^m-1)(\lambda^p-1)(\lambda^\nu-1)\cdots\cdots=0$ ナル方程式ノ根全体ト一致スルト云フコトヲ示シテ居ルガ、コレハ丁度前號(187号) 810ノ472—474頁デ得ラレタ Markoff-chain ニ関スル結果ト全ク同ジデアル。

$i=1,2,\cdots\cdots,N$ ナル如キ $(\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots,\xi_N)$ ガ存在シタトスレバ $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}|\xi_j| \geqq |\xi_i|,\ i=1,2,\cdots\cdots,N$ トナル。

即チ $P(|\xi|) \geqq |\xi|$ ナル如キ positive element $|\xi|=(|\xi_1|,|\xi_2|,\cdots\cdots,|\xi_N|)$ ガ存在スル。コレヨリ紙上談話會110号752ノ議論ヲ用フレバ（702頁ノ定理1）$Tx=dx$ ナル如キ positive element $x>0$ 及ビ positive number $d \geqq 1>0$ ガ存在スル。定理ノ假定ヨリ P ノスベテノ固有値ハ絶對値1ヲ超ヘナイカラ $d=1$ デナケレバナラヌ。$x=(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_N)$ ハスベテ 0 トハナラナイガ、中ニハ 0 トナルモノガアルカモ知レナイ。

(i) スベテノ $x_i>0$ ナルトキ。コノトキハ $p^*_{ij}=x_i^{-1}p_{ij}x_j$ トオキ matrix $P^*=(p^*_{ij})$ ヲ考ヘル。シカルトキハ明カニ P^* ハ P ト同ジ固有値ヲモチ且ツ $\sum_{j=1}^{N} p^*_{ij}=x_i^{-1}\sum_{j=1}^{N} p_{ij}x_j=1$ デアルカラ P^* ハ markoff chain ノ matrix デアル。ヨッテ（既ニ述ベタ）良ク知ラレタ結果ニヨリ P^* ノ固有値、シタガッテ P ノ固有値デ $|\lambda|=1$ トナルモノハスベテ $\lambda^n=1$ ヲ満足スル。

(ii) x_i ノウチニ 0 トナルモノガアル場合．
$0<r<N$ ヲトリ、$x_1,x_2,\cdots\cdots,x_r>0$, $x_{r+1},x_{r+2},\cdots\cdots,x_N=0$ デアルト假定シテモ一般性ヲ失ハナイ。

然ルトキハ $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\, x_j = 0$ ガ $i > r$ ニ対シテ成立スルコトヨリ $i > r$, $j \leqq r$ ニ對シテ $p_{ij} = 0$ トナラネバナラヌ。ヨッテ matrix P ハ $P = \begin{pmatrix} P_1 & * \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$ ナル形ニ分解スル。シタガッテ P ノ固有値ハ P_1 及ビ P_2 ノ固有値ノ全体ト一致スル。ヨッテ我々ノ問題ハ P ヨリ degree 低イ matrix ノ場合ニ reduce サレタ。P ノ degree ガ 1 ナルトキハ定理ハ明カニ眞デアルカラ、帰納法ニヨッテ証明ハ完結スル。

$\boxed{\text{注意}}$ 上ノ証明ハ紙上談話會 170 号 752 ノ結果ヲ使フノデ少シ複雑デアル。コレヲモットワカリ易クスルニハ次ノヤウニスレバヨイ。（實際ハ、談話 752 ノ定理ノハ elementary ナ定理デ、以下ニ使フ Fix-punktsatz ハ elementary デハナイ定理デアルカラ、以下ノ議論ハカヘッテ難カシイコトヲヤルコトニナルワケデアルが、以下ノ証明ノ方が遙カニワカリ易イ）。

先ヅ P ノ real positive ナ固有値 α ト $P(x) = \alpha x$ ナル如キ positive vector x トが存在スルコトヲ証明スル。コレヲ示スニハ sphere $|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots\cdots + |x_n|^2 = 1$ ノ positive part ($x_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \cdots\cdots, N$) ヲソレ自身ニウツス寫像 $\varphi(x) = \dfrac{P(x}{\|P(x)\|}$

（但シ $\|\cdots\|$ ハ Euclid ノ n 次元空間トシテノ norm）

ヲ考ヘテコノ寫像ニ Fixpunkt ガアルコトヲ思ヘバヨイ。（$\varphi(x)=x$ トナルコトハ $P(x)=\alpha x$ トナル positive number α ガ存在スルコトト同等デアル）$\alpha\leqq 1$ トナルコトハ假定ヨリ明カ。

此ノ如ク α ト x トガ定マレバ後ハ (i)(ii) ノ二ツノ場合ニワケテ殆ンド同様ニ議論ヲスヽメルコトガ出來ル。即チ (i) ノ場合ハ $P^*=(p_{ij}^*)$ ナル matrix ハ $\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^*=\alpha\leqq 1$ ヲ満足スルカラ $\|P^*\|=\alpha<1$ デアル。ヨッテ P^* シタガッテ P ノ固有値 λ ハスベテ $|\lambda|\leqq\alpha$ トナリ、$|\lambda|=1$ ナル固有値ガ存在スルコトニ矛盾スル。(ii) ノ場合ハ全ク同様ニシテ $P=\begin{pmatrix} P_1 & * \\ 0 & P_i \end{pmatrix}$ トナルカラ、ヤハリ歸納法ガ應用出來ル。