815. H. Lebesgue 及ビ F. Riesz ノ定理ノ擴張

國澤　清典（阪大）

此処ニ Lebesgue ノ定理ト云フノハ Banach 空間（以下 B-空間ト書ク）L ニ於テ任意ノ $f_n \in L$ ノ作ル sequence $\{f_n\}$ ガ equi-integrable ナラバ $\{f_n\}$ ハ $f \in L$ ニ weakly converg スル sub-sequence $\{f_{n_i}\}$ ヲ含ムトイフノデアリ，又 Riesz ノ定理ハ L^p $(p>1)$ ニ於テ有界集合ガ weakly compact デアルト云フノデアル。

今コノ L 及ビ L^p ヲ拡張シテ abstract valued function 即チ value ガ B-空間 X ニ属スル函数ノ作ル空間ニシテ、後ニ於テ説明スル $L(X)$, $L^p(X)$, $(p>1)$ ノ場合デノ Lebesgue 及ビ Riesz ノ定理ヲ考ヘタイ。此ニ関シテ S. Bochner—A. E. Taylor ハ Ann of Math. 39—4 (1938) ニ於テ B-space X ガ regular 及ビ X ノ conjugate space $\overline{X}$ ニ値ヲモツ任意ノ有界変分ノ函数ガ微分可能ト云フ條件ノ假定ノ下ニ論ジテイルガ實ハ regular ナラバ locally weakly compact ナル[1] 故ニ S. Bochner-A. E. Taylor ノ條件ヨリモ弱イ X ガ locally weakly compact ト云フ假定ダケカラ上記ノ二定

---

(1) 談話 9.14

理ガ得ラレルト云フ事ヲ述ベテ見タイ。

先ヅ可測，可積分ニ関スル S. Bochner ノ定義ヲ使ッテ次ノ函数空間ヲ定義スル。函數ハスベテ區間 $[0, 1]$ ニ於テ a.e.ニ（殆ンドスベテノ点デ）定義サレテ S. Bochner ノ意味デ可測トスル。

$L^p(X)$, $(p \geq 1)$: 値ヲ B－空間 X ニモチ，$\|f\| = \left(\int_0^1 \|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ ガ finite ナ函数 f ノ作ル空間デ此ノ norm デ $L^p(X)$ $(p \geq 1)$ ハ B－空間ヲ作ル。$p=1$ ナラバ index ヲ省イテ $L(X)$ トスル。

$M(X)$: 値ヲ X ニモツ essentially bounded functions ノ作ル空間デ $\|f\| = \underset{0 \leq t \leq 1}{\text{ess.sup}} \|f(t)\|$ デ norm ヲツケルト $M(X)$ ハ B－空間トナル。

$\boxed{L(X) \text{ デノ Lebesgue ノ定理}}$

X ヲ weakly compact ナ B－空間トスル。

任意ノ $f_n(t) \in L(X)$ ノ作ル sequence $\{f_n(t)\}$ ガ equi-integrable[(1)] ナラバ $f(t) \in L(X)$ ニ weakly converg スル sub-sequence $\{f_{n_i}(t)\}$ ガ存在スル。

定理ノ証明ノタメ次ノ lemma ヲアゲル。

$\boxed{\text{lemma}}$ X ガ weakly compact ナラバ $L(X)$ デ

---

(1) 任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ $\delta > 0$ ガ定リ $mes(S) \leq \delta$ ナラバ n ニ無関係ニ $\int_S \|f_n(t)\| dt \leqq \varepsilon$ ナルコト

定義サレタ linear functional ハ次ノ様ニ表ハセル。

$$U(t)=\int_0^1 \varphi(t)f(t)dt$$

但シ $\varphi(t)\in M(\overline{X})$, $f(t)\in L(X)$ 及ビ $\|U\|=\underset{0\leq t\leq 1}{\mathrm{ess.\,sub}}\|\varphi(t)\|$ デアッテ $\varphi(t)f(t)$ ハ Complex number system ニ値ヲモツ Lebesgue integrable function デ積分ハ Lebesgue integral デアル。

$\boxed{\text{lemma ノ証明}}$ B—空間 X ニ値ヲモツ有界変分ノ函数 f トハ如何ナル分割 $\{t_\nu\}: 0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ ニ對シテモ

$$\underset{\{t_\nu\}}{\mathrm{l.u.b}}\sum_\nu^n\|f(t_\nu)-f(t_{\nu-1})\|<\infty$$

ナル $f(t)$ ヲ云フコトニシ $V(X)$ デソノ space ヲ示スコトトスルト $V(\overline{X})\ni\phi(t)$ ガスベテ a.e. ニ微分可能ナラバ $L(X)$ デ定義サレタ linear functional ハ

$$U(f)=\int_0^1 \varphi(t)f(t)dt$$

デアル。但シ $\varphi(t)\in M(\overline{X})$, $f(t)\in L(X)$ 及ビ $\|U\|=\underset{0\leq t\leq 1}{\mathrm{ess.\,sup}}\|\varphi(t)\|$ デアルト云フ S. Bochner — A. E. Taylor ノ結果 (Ann. of Math. 39-4 (1938)) トB—空間ガ locally weakly compact ナラバソノB—空間ニ value ヲモツ additive bounded variation ノ interval function ハ $[0,1]$ デ

a. e、ニ微分可能デアルト云フ B.T. pettis ノ結果(Duke Math. 5-2(1939))トニ依ッテ假定ヨリ X ハ locally weakly compact ナル故 $\overline{X}$ モ亦 locally weakly compact トナル故[1] ニ B.J. Pettis 及ビ S. Bochner - A.E. Taylor ノ條件ヲ満足シテイルカラ $L(X)$ デノ linear functional ハ次ノ様ニ表ハセル。

$$U(f)=\int_0^1 \varphi(t)f(t)\,dt$$

$\boxed{\text{定理ノ証明}}$ 適當ニ $f_n(t)(n=1,2,\cdots\cdots)$ カラ subsequence $\{f_{n_i}(t)\}$ ヲ選ンデ如何ナル $\varphi(t)\in M(\overline{X})$ ニ對シテモ次ノコトヲ証明スレバヨイ。

$$\int_0^1 \varphi(t)f_{n_i}(t)\,dt \longrightarrow \int_0^1 \varphi(t)f(t)\,dt.$$

今 $$F_n(s)=\int_0^s f_n(t)\,dt \qquad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

ト置ケバ(integral ハ Bochner-integral, 以下 abstract valued function ノ integral ハスベテ Bochner ノ意味トスル) $f_n(t)$ ノ equi-integrable ナル事ヨリ

---

1) V. Gantmakher et V. Smulian, Sur les espaces linéaires dont la sphére unitaire est faiblement compacte, Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sience de I'U.R.S.S. 17(1937) P. 91-94. Theorem 3.

$$\| F_n(s) \| = \left\| \int_0^s f_n(t)\,dt \right\| \leqq \int_0^s \| f_n(t) \|\,dt$$

$$\leqq \int_0^1 \| f_n(t) \|\,dt \leqq M$$

ナル n 及ビ s ニ無関係ナ常数 M ヲ取リ得ル。

[0, 1] ニ於テ everywhere dense ナ可附番個ノ点ヲ s_1, s_2, ----- トスレバ適当ニ sub-sequence $\{F_{n_i}\}$ ヲ選ビ各 s_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$ デ X ノ element ニ weak ニ converge スルヤウニスルコトガ X ノ locally weakly compact ナルコトヨリ可能デアル。又 $\varphi F_n(s)$ ノ equi-continious ナル事[1] ヲ使ヘバ各点 s デ $\{F_{n_i}(s)\}$ ハ weak ニ converge スル事トナル。即チ

$$\lim_{n_i \to \infty} \varphi F_{n_i}(s) = \varphi F(s)$$

ト書ケル。此処ニ F(s) ハ各 s ニツイテソノ値ガ X ニ属ス函数デアル。次ニ $f_n(t)$ ノ equi-integrable ナルコトヨリ $\varepsilon > 0$ ヲ任意ニ与ヘ non-overlapping intervals $\{[t'_\nu, t_\nu]\}$ $(\nu = 1, \cdots\cdots m)$ ヲ取リ、$0 \leqq t'_1 < t_1 < t'_2 < t_2 < \cdots\cdots < t'_m < t_m \leqq 1$ トシ、$\sum_{\nu=1}^{m} (t_\nu - t_{\nu-1}) < \delta$ ナラバ

$$\sum_{\nu=1}^{m} \int_{t'_\nu}^{t_\nu} \| f_n(t) \|\,dt < 2 \qquad n = 1, 2, \cdots\cdots$$

---

(1) 之ハ f_n ノ equi-integrability カラ直グワカル。実ハ直グ後カラ証明スル様ニ $\varphi F_n(s)$ ハ equi-absolutely continuous ニナルノデアル。

ナラシメ得ル $\|\varphi_\nu\|=1$ ナル $\varphi_\nu\in\overline{X}$ ニ對シ

$$\sum_\nu|\varphi_\nu F_{n_i}(t_\nu)-\varphi_\nu F_{n_i}(t'_\nu)|\leqq\sum_\nu\|F_{n_i}(t_\nu)-F_{n_i}(t'_\nu)\|$$
$$=\sum_\nu\int_{t'_\nu}^{t_\nu}\|f_{n_i}(t)\|\,dt<\varepsilon$$

$n_i\longrightarrow\infty$ ナラシメルト

$$\sum_\nu|\varphi_\nu F(t_\nu)-\varphi_\nu F(t'_\nu)|\leqq\varepsilon$$

ヨツテ特ニ

$$|\varphi_\nu F(t_\nu)-\varphi_\nu F(t_{\nu-1})|=|\varphi_\nu F(t_\nu-t_{\nu-1})|$$
$$=\|F(t_\nu-t_{\nu-1})\|$$

ナル様ナ $\|\varphi_\nu\|=1$ ヲトルト

$$\sum_\nu|\varphi_\nu F(t_\nu)-\varphi_\nu F(t'_\nu)\|=\sum_\nu\|F(t_\nu)-F(t'_\nu)\|$$
$$=\sum_\nu\|F(t_\nu-t'_\nu)\|\leqq\varepsilon$$

故ニ

$$\sum_\nu\|F(t_\nu)-F(t'_\nu)\|\leqq\varepsilon$$

故ニ $F(t)$ ハ absolutly continuous ナルコトガ分ツタ。

サテ X ハ locally weakly compact ナル故ニ lemma デ使ツタ Pettis ノ結果ヨリ，$F(t)$ ハ明ラカニ bounded variation ナル故，$[0,1]$ デ a.e. ニ derivative $F'(t)\in L(X)$ ヲモツ、又 $F(t)$ ノ absolutly continuous ナルコトヨリ

$$F(s)=\int_0^s F'(t)\,dt.$$

何トナラバ

$$G(t)=F(t)-\int_0^t F'(t)\,dt$$

ト置クト $G(t)$ ハ又 absolutly continuous デ a. e. ニ $G'(t)=0$ ナル derivative ヲモツ。然ルニ $G(t)$ ノ total variation ヲ $V(G)$ デ表ハスト

$$V(G_1)=\int_0^1\|G'(t)\|=0$$

故ニ $G(t)$ ハ identically const. デ $G(0)=0$ ナル故ニ

$$G(t)\equiv 0$$

以上デ次ノコトが云ヘタ。

$$\lim_{n_i\to\infty}\varphi\int_0^s f_{n_i}(t)\,dt=\varphi\int_0^s F'(t)\,dt.$$

此レヨリ $\varphi(t)$ が step-function ナラバ容易ニ次ノ事が云ヘル。

$$\lim_{n_i\to\infty}\int_0^1\varphi(t)f_{n_i}(t)\,dt=\int_0^1\varphi(t)F'(t)\,dt.$$

然ルニ $\varphi(t)\in M(\overline{X})$ ナラバ a.e. ニ $\varphi(t)$ ニ strong ニ converge スル uniformly bounded ナ step-function ノ系列 $\{\varphi_i(t)\}$ ヲ選ビ δ ヲ任意ニ與ヘテモ mes $(E)>1-\delta$ ノ set E デ $\varphi_i(t)$ ヲ $\varphi(t)$ ニ uniform ニ converge サスコトが出來ル。[3] 又 $\{f_{n_i}(t)\}$ ノ equi-

---

3) S. Bochner, Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind, Fund. Math. Vol. 20 (1933) P.264.

integrability ト $\int_S \|F'(t)\| dt$ ノ *absolutly continious* ナルコトヨリ $\varepsilon > 0$ ガ與ヘラレ、δ ガ上述ノ δ デアリ且ツ同時ニ次ノコトガ満足サレルヤウナ δ ヲ取ルコトガ出来ル。即チ E ノ余集合 S ニツイテ $mes(S) < \delta$ トナリ

$$\int_S \|F'(t)\| dt < \varepsilon$$

且ツ

$$\int_S \|f_{n_i}(t)\| dt < \varepsilon \qquad (n_i = n_1, n_2, \cdots\cdots)$$

又集合E上デ $\|\varphi_i(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ ナル様ニ i ヲ充分大キク取ルト

$$\left|\int_0^1 \varphi(t) f_{n_i}(t)\, dt - \int_0^1 \varphi(t) F'(t)\, dt\right| \leqq \left|\int_0^1 [\varphi(t) - \varphi_i(t)] f_{n_i}(t)\, dt\right|$$

$$+ \left|\int_0^1 \varphi_i(t) f_{n_i}(t)\, dt - \int_0^1 \varphi_i(t) F'(t)\, dt\right| + \left|\int_0^1 (\varphi_i(t) - \varphi(t)) F'(t)\, dt\right|$$

$$\leqq \left|\int_E [\varphi(t) - \varphi_i(t)] f_{n_i}(t)\, dt\right| + \left|\int_S [\varphi(t) - \varphi_i(t)] f_{n_i}(t)\, dt\right|$$

$$+ \left|\int_0^1 \varphi_i(t) f_{n_i}(t)\, dt - \int_0^1 \varphi_i(t) F'(t)\, dt\right| + \left|\int_E [\varphi_i(t) - \varphi(t)] F'(t)\, dt\right|$$

$$+ \left|\int_S [\varphi_i(t) - \varphi(t)] F'(t)\, dt\right|$$

既ニ証明シタコトニヨリ n_i ヲ充分大キクシトレバ

$$\left|\int_0^1 \varphi_i(t) f_{n_i}(t)\, dt - \int_0^1 \varphi_i(t) F'(t)\, dt\right| < \varepsilon$$

$$(i = 1, 2, \cdots\cdots)$$

トナリ又

$$\overline{M} = \mathrm{Max}\left(\operatorname*{ess.sup}_{0\leq t\leq 1}\|\varphi_i(t)\|,\ \operatorname*{ess.sup}_{0\leq t\leq 1}\|\varphi(t)\|\right)$$

トオケバ

$$\leq \varepsilon\int_E \|f_{n_i}(t)\|\,dt + 2M\int_S \|f_{n_i}(t)\|\,dt + \varepsilon$$

$$+\ \varepsilon\int_E \|F'(t)\|\,dt + 2M\int_S \|F'(t)\|\,dt$$

$$\leqq \varepsilon\int_E \|f_{n_i}(t)\|\,dt + 2M\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon\int_E \|F'(t)\,dt + 2M\varepsilon$$

$\int_E \|f_{n_i}(t)\,dt$, $\int_E \|F'(t)\|\,dt$ ハ何レモ有界ナル

故ニ

$$\lim_{n_i\to\infty}\int_0^1 \varphi(t)f_{n_i}(t)\,dt = \int_0^1 \varphi(t)F'(t)\,dt$$

$F'(t)$ ヲ初メニオイタ $f(t)$ ト考ヘレバ証明ハ終ツタワケデアル。

次ニ $L^p(x)$ $(p>1)$ ニツイテモ X ノ locally weakly compact ト云フ仮定ノ下デヤレル。

$\boxed{L^p(x)\text{ デノ Riesz ノ定理}}$

X ガ locally weakly compact ナ B−空間ナラバ $L^p(x)$ ハ又 locally weakly compact デアル。

証明ノ前ニ lemma ヲ述ベテ置ク。

$\boxed{\textit{Lemma}}$ X ヲ locally weakly compact ナ B－空間トスレバ $L^p(X)$ デ定義サレタ linear functional ハ次ノ様ニカケル。

$$U(f)=\int_0^1 \varphi(t)f(t)\,dt$$

此処ニ $\varphi(t)\in L^q(\overline{X})$, $f(t)\in L^p(X)$,

$$\|U\|^q=\int_0^1\|\varphi(t)\|^q\,dt,$$ 及ビ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ トス。

$\boxed{\text{証明}}$ $L_1(X)$ ノ lemma ト全ク同様ノ理由ニヨルノデ省略スルコトトスル。（Bochner－Taylor 定理ト Pettis 定理ノ應用）

$\boxed{\text{定理ノ証明}}$ $\|f_n\|\leqq M$（M ハ常数）ナ $f_n(t)$ ノ sequence $\{f_n(t)\}$ カラ sub-sequence $\{f_{n_i}(t)\}$ ヲ選ンデ如何ナル $\varphi(t)\in L^q(\overline{X})$ ニ対シテモ

$$\lim_{n_i\to\infty}\int_0^1\varphi(t)f_{n_i}(t)\,dt=\int_0^1\varphi(t)\,f(t)\,dt$$

ヲ証明スレバ良イ。Hölder ノ不等式ニヨリ

$$\left\|\int_0^1 f_n(t)\,dt\right\|\leqq\int_0^1\|f_n(t)\|\,dt\leqq\left(\int_0^1\|f_n(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}=\|f_n\|\leqq M$$

ナル故ニ

$$\int_0^s f_n(t)\,dt=F_n(s)$$

トオク事トシ $[0,1]$ ノ分割 $\{t_\nu\}$: $0=t_0<t_1<\cdots\cdots<t_n=1$ ヲ考ヘ

$$V^p(f) = \underset{\{t_\nu\}}{l.u.b.} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\| f(t_\nu) - f(t_{\nu-1}) \|^p}{| t_\nu - t_{\nu-1} |^{p-1}} < \infty$$

ナル $f(t)$ 全体ノ集合ヲ $V^p(X)$ デアラハスト

$$V^p(F_n) = \int_0^1 \| f_n(t) \|^p dt \leq M^p \qquad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

ナルコトガ容易ニ分リ $F_n(t) \in V^p(X) \quad (n=1,2,\cdots\cdots)$ デアル。

サテ $[0,1]$ デ everywhere dense ナ集合 $s_1, s_2, \cdots\cdots$ ヲ取リ適當ニ sub-sequence $\{f_{n_i}(t)\}$ ヲ取リ各 s_i ニツイテ

$$\varphi F_{n_i}(s_i) \longrightarrow \varphi F(s_i) \qquad \varphi \in \overline{X}$$

此処ニ $F(s_i)$ ハ各 s_i ニツイテ X ノ element デアル。

任意ノ $s \in [0,1]$ ニツイテ ε ヲ任意ニ與ヘテ

$$|\varphi F_{n_i}(s) - \varphi F_{n_k}(s)| \leq |\varphi F_{n_i}(s) - \varphi F_{n_i}(s_i)| + |\varphi F_{n_i}(s_i) - \varphi F_{n_k}(s_i)| + |\varphi F_{n_k}(s_i) - \varphi F_{n_k}(s)|$$

$$|\varphi F_{n_i}(s) - \varphi F_{n_i}(s_i)| \leq (\|\varphi\|^q |s-s_i|)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{\| F_{n_i}(s) - F_{n_i}(s_i) \|^p}{|s-s_i|^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \|\varphi\| \, |s-s_i|^{\frac{1}{q}} M < \varepsilon \qquad (n_i = n_1, n_2, \cdots\cdots)$$

ナル様ニ s ニ充分近イ s_i ヲ取リ、

$$|\varphi F_{n_i}(s_i) - \varphi F_{n_k}(s_i)| < \varepsilon \qquad n_i, n_k > N$$

ナル様ニ n_i, n_k ヲ取レバ

$$|\varphi F_{n_i}(s) - \varphi F_{n_k}(s)| < 3\varepsilon$$

此レヨリ各点デ如何ナル $\varphi \in \overline{X}$ ニツイテモ

$$\varphi\int_0^s f_{n_i}(t)\,dt \longrightarrow \varphi F(s)$$

此処ニ $F(s)$ ハ各 s ニツイテ $F(s)\in X$ ナル函数デアル。

次ニ $\|\varphi_\nu\|=1$ ナル φ_ν ニツイテ

$$\sum_\nu \frac{|\varphi_\nu F_{n_i}(t_\nu)-\varphi_\nu F_{n_i}(t_{\nu-1})|^p}{|t_\nu-t_{\nu-1}|^{p-1}} \leqq \sum_\nu \frac{\|F_{n_i}(t_\nu)-F_{n_i}(t_{\nu-1})\|^p}{|t_\nu-t_{\nu-1}|^{p-1}}$$
$$\leqq M^p$$

$n_i\longrightarrow\infty$ ナラシメルト

$$\sum_\nu \frac{|\varphi_\nu F(t_\nu)-\varphi_\nu F(t_{\nu-1})|^p}{|t_\nu-t_{\nu-1}|^{p-1}} \leqq M^p$$

此処デ特ニ $|\varphi_\nu(F(t_\nu)-F(t_{\nu-1}))|=\|F(t_\nu)-F(t_{\nu-1})\|$, $\|\varphi_\nu\|=1$ ナル φ_ν ヲトレバ

$$\sum_\nu \frac{\|F(t_\nu)-F(t_{\nu-1})\|^p}{|t_\nu-t_{\nu-1}|^{p-1}} \leqq M^p$$

故ニ $F(t)\in V^p(X)$ ナルコトガ云ヘタ。

X ハ weakly compact ナル故ニ $F(t)$ ハ a. e. ニ derivative $F'(t)$ ヲモチ $F'(t)\in L^p(X)$ ナル事ハ容易ニワカリ、次ノ事ガ成立スル。

$$F(t)=\int_0^t F'(s)\,ds.$$

何トナラバ $F(t)-\int_0^t F'(s)\,ds=G(t)$ トオクト $F(t)\in V^p(X)$, $\int_0^t F(s)\,ds\in V^p(X)$ ナル故ニ其ノ差 $G(t)$ モ亦 $V^p(X)$ ニ

属ス。又 derivative $G'(t)=0$ ヲ a.e. ニモツコトヨリ

$$V^p(G)=\int_0^1 \|G'(t)\|^p dt=0$$

故ニ $G(t)$ ハ identically const. デ $G(0)=0$ ヨリ $G(t)\equiv 0$ デアル。

故ニ

$$F(t)=\int_0^t F'(s)\,ds$$

以上デ適當ニ sub-sequence $\{f_{n_i}(t)\}$ ヲ エランデ次ノコトガ云ヘタ。

$$\lim_{n_i\to\infty} \varphi\int_0^s f_{n_i}(t)\,dt=\varphi\int_0^s F'(t)\,dt.$$

step-function ハ $L^q(\overline{X})$ デ everywhere dense ナルコトヨリ $L(X)$ ノトキト同様ニ $\varphi(t)\in L^q(\overline{X})$ ニ對シ

$$\lim_{n_i\to\infty}\int_0^1 \varphi(t)f_{n_i}(t)\,dt=\int_0^1 \varphi(t)\,F'(t)\,dt$$

$F'(t)$ ヲ $f(t)$ ト考ヘレバ証明ハ終ッタワケデアル。

(注意) 以上ノ事ヲ mean ergodic theorem ニ apply スレバ談話 776 ガ $L(X)$ 及 $L^p(X)$ デ論ズルコトガ出来ル。