813. 渡部重勝氏ノ御質問ニ答ヘテ

穂刈　四三二（北大）

本誌第186号，448—450頁デ渡部氏ハ河口氏ノ論文ニツイテ二ツノ質問ヲシテ居ラレマス。私ノ論文ニモ同様ナ箇所ガ有リマスカラ，私ノ知ツテ居リマス範囲デ御答ヘヘシタイト存ジマス。

I．第一ハ曲線 $x^i = x^i(t)$ ノ arc length ガ積分

$$(1)\quad s = \int \left\{ A_i(x, x^{(1)}) x^{(2)i} + \beta(x, x^{(1)}) \right\}^{\frac{1}{p}} dt,$$

$$\left(x^{(r)i} = \frac{d^r x^i}{dt^r} \right)$$

デ與ヘラレル空間ヲ考ヘルトキ，A_i ガ一ツノ covariant vector ノ component デアルコトガ容易ニワカルト論文ニアルガ vector ノ comp. デナイ場合ガアルデハナイカ？トノ御質問ノヤウデアリマス。同氏ハ「Finsler space トカ，河口氏ノ space ニツイテ予備知識ガアルナラバ生ジナイ疑問デセウガ」ト云ツテ居ラレマスガ，ノ第一ノ御質問ハ，私ハソウイフ知識ガナクトモ sub-space ノ理論ヲ知ツテ居ラルレバ容易ニ解決ガツクノデハナイカト思ヒマス。

同氏ノ挙ゲラレタ例ハ (1) ノ形デ今少シ一般ナモノトシテ，三次元空間ノ曲線 $x^i = x^i(t)$ ノ arc length

ガ

$$(2) \qquad s = \int \begin{vmatrix} x^{(1)1} & x^{(2)1} & x^{(3)1} \\ x^{(1)2} & x^{(2)2} & x^{(3)2} \\ x^{(1)3} & x^{(2)3} & x^{(3)3} \end{vmatrix}^{\frac{1}{6}} dt$$

デ與ヘラレル空間ヲ考ヘル。（勿論河口空間ノ一種デス）コヽデ曲面

$$(3) \qquad x^i = x^i(u^1, u^2), \qquad i = 1, 2, 3$$

ヲ考ヘテ積分(2)ヲ変形スルト

$$(4) \qquad s = \int \left\{ A_a(u, u^{(1)}, u^{(2)})\, u^{(3)a} + B(u, u^{(1)}, u^{(2)}) \right\}^{\frac{1}{6}} dt,$$

$$a = 1, 2$$

トナル。然レニ Aa ハ vector ノ comp. デハナイト申シテ居ラレマス。

サテ私ノ考ヘデハ、同氏ガ(2)ヲ(4)ニ変形サレレルトキニ、考ヘテ居ル曲線ガ曲面(3)ノ上ニアルコトヲ暗々裏ニ假定シテ居リマス。（事実曲線ガ曲面(3)ノ上ニナケレバ，斯様ナ変形ハ出来マセン。）従ッテ曲線ハ曲面上ノ曲線トナリ，(4)ハソノ曲線ノ arc length デス。

今曲面上ノ座標変換ヲ考ヘマス；

$$(5) \qquad \bar{u}^a = \bar{u}^a(u^1, u^2), \qquad a, b, c, d = 1, 2$$

コノ式ヲ t デ微分シテ

$$(6) \quad \begin{cases} \bar{u}^{(1)a} = \dfrac{\partial \bar{u}^a}{\partial u^b} u^{(1)b}, \quad \bar{u}^{(2)a} = \dfrac{\partial \bar{u}^a}{\partial u^b} u^{(2)b} + \dfrac{\partial^2 \bar{u}^a}{\partial u^b \partial u^c} u^{(1)b} u^{(1)c}, \\ \bar{u}^{(3)a} = \dfrac{\partial \bar{u}^a}{\partial u^b} u^{(3)b} + 3 \dfrac{\partial^2 \bar{u}^a}{\partial u^b \partial u^c} u^{(2)b} u^{(1)c} + \dfrac{\partial^3 \bar{u}^a}{\partial u^b \partial u^c \partial u^d} u^{(1)b} u^{(1)c} u^{(1)d} \end{cases}$$

ガ得ラレマス。トコロガ曲線ノ長サsハ曲面上ノ座標変換(5)ニ對シテ invariant デナケレバナリマセン。從ッテ$A_a u^{(3)a}+B$ハ scalar デナケレバナリマセン。即チ

$$\bar{A}_a \bar{u}^{(3)a} + \bar{B} = A_b u^{(3)b} + B.$$

コノ式ノ両辺ヲ$u^{(3)b}$デ微分シマスト

$$(7)\quad \bar{A}_a \frac{\partial \bar{u}^{(3)a}}{\partial u^{(3)b}} = A_b$$

然ルニ(6)ノ最後ノ式カラ$\dfrac{\partial \bar{u}^{(3)a}}{\partial u^{(3)b}} = \dfrac{\partial \bar{u}^{a}}{\partial u^{b}}$デアリマスカラ，コレヲ(7)ニ代入シテ

$$\boxed{\bar{A}_a \frac{\partial \bar{u}^{a}}{\partial u^{b}} = A_b}$$

トナッテ，A_aガ covariant vector ノ comp. デアルコトガ分リマス。

同氏ハ曲面上ノ変換デナク，ソノ曲面ヲ含ム三次元空間デノ座標変換ヲ考ヘテ居ラレルノデハナイデセウカ。三次元空間デノA_aノ comp. ヲA_i $(i=1,2,3)$トスレバ sub-space ノ理論デ良ク御承知ノ様ニ，A_iトA_aトノ間ニハ$A_i \dfrac{\partial x^i}{\partial u^a} = A_a$ナル関係式ガ成立シマス。從ッテコノ式ノ左辺カラ見レバ，A_iハ covariant vector ノ comp. デ，$\dfrac{\partial x^i}{\partial u^a}$ハ$i$ニツイテ contravariant vector ノ comp. デスカラ$A_i \dfrac{\partial x^i}{\partial u^a}$ハ$x$ノ変換デハ invariant，即チ$A_a$ハ$x$ノ変換デハ invariant

デアリマス。コレハ當然幾何學的ニ明ラカナコトデス。(1) ノ A_i ハ $A_i x^{(2)i}+B$ ヲ最高次ノ $x^{(2)}$ デ微分シタトキノ微係數デアリマス。若シ曲面ノ含マレル空間ノ座標變換ヲ考ヘテ居ラレルモノデシタラ，A_a デハナク $x^{(3)i}$ デ微分シタトキノ微係數ヲトラナケレバナリマセン。

II. 第二ニ「コレガ Kawaguchi space ト云フモノナノデセウカ」トノ御質問デスガ，コレガ ト云フ言葉ガ (1) ヲ意味スルモノトシテ御答ヘ致シマス。

一般ニ n 次元空間デ曲線ノ長サガ

$$s=\int F(x,x^{(1)},x^{(2)},\ldots\ldots,x^{(m)})\,dt,\quad (n \lesseqgtr m)$$

或ハ更ニ一般ニ

$$s=\int F(t,x,x^{(1)},\ldots\ldots,x^{(m)})\,dt$$

デ與ヘラレル空間ヲ私共ハ Kawaguchi space ト呼ンデ居リマス。從ッテ metric ガ (1) デ與ヘラレル空間モ $m=2$ ノ特別ナ河口空間

$$s=\int F(x,x^{(1)},x^{(2)})\,dt$$

ノ更ニ F ガ特殊ナ形ヲトッタ場合デアリマス。

ナゼ初メコンナ特殊ノ場合ヲヤッタカト申サレルカモ知レマセンガ，ソレハ一般ノ場合ハ附帯條件ガ邪魔ヲ致シテ仲々出來ナカッタカラデス。何レ河口博士ノ河口空間ニ對スル

長大ナ論文ガ発表サレマスカラ夫レデ良ク御了解ガ出來ルコトト思ヒマス。

（1939，10，6）