811. Markoff Chain ノ一ツノ抽象化

吉田　耕作（阪大）

§1. 前置キ

$\Omega=(0,1)$ ノ点 x ガ単位時間後ニ Ω ノ Borel 集合 E ニ入ル遷移確率ガ $P(x,E)$ デ與ヘラレル如キ Markoff chain ヲ考ヘル．$P(x,E)$ ハ x ヲ固定スレバ Borel 集合 E ニ關シ complete additive，又 E ヲ固定スレバ x ニ關シ Borel measurable トスル。定義カラ

(1) $P(x, E) \geqq 0$ 且ツ $P(x, \Omega) \equiv 1$

今 Ω ノ Borel 集合デ complete additive ナ set function $f(E)$ 全体ノ作ル Banach 空間 (M)[1] ヲ考ヘルト $P(x, E)$ ニヨリ (M) ノ (M) 内ヘノ norm 1 ノ positive operation P ガ定義サレル。

$$P \cdot f = g, \quad g(E) = \int_{\Omega} f(dx) P(x, E)$$

Markoff chain $P(x, E)$ ノ問題ヲ P ノ iteration P^n, $n \to \infty$ ニ於ケル asymptotic beharviour ニ結ビツケテ論ズルコトハ本紙上ニ屢次談話セラレタ（角谷氏並ビニ筆者）[2]。ソノ結果ニヨレバ J. Hadamard, M. Fréchet, J. L. Doob, W. Doeblin, Kryloff-Bogolioaboff 等ノ結果ガ次ノ假定ノモトニヨリ precise ニ統一的ニ取扱ヘルノデアル。

(2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{整数 } m \text{ ト完全連続ナ線型作用素（} (M) \text{ ヲ } (M) \\ \text{内ニ写ス）} V \text{ ガ存在シテ } \| P^m - V \| < 1 \end{array} \right.$

以前ノ談話ヲ反省シテミルト、假定(1), (2) カラ出テクル次ノ三ツノ事実ノオ蔭デ話ガススムノデアル。即チ

---

(1) norm $\|f\| = \text{total variation}_{E \in \Omega} |f(E)|$

(2) 筆者談話 746, 780, 角谷氏談話 804, 807

I. *Uniform ergodic theorem.* *Banach* 空間ノ線型作用素 P ガ $\|P^n\| \leqq$ 常數 $(n=1,2,\cdots\cdots)$ 及ビ (2) ヲ滿足スルナラバ

$$(3)\begin{cases} P=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i P_i + S, \quad PP_i = P_i P = \lambda_i P_i \\ P_i^2 = P_i, \; P_i P_j = 0 \quad (i \neq j), \; P_i S = S P_i = 0 \text{ 且} \\ \|S^n\| \leqq \dfrac{\delta}{(1+\varepsilon)^n} \quad (n=1,2,\cdots\cdots) \end{cases}$$

ナル如キ完全連續線型作用素 P_i ト連續ナ線型作用素 S トガ存在スル。コヽニ λ_i ハ下ノ絶對値 1 ノ固有値

コヽニ注意スベキハ *Banach* 空間ハ任意デヨイコト即チ $(\mathfrak{M})$ デアル必要ナイコト，又 P モ *kernel* $P(x, E)$ デ定義サレタモノデアルコトモ *positive operation* デアルコトモ必要ナイコトデアル。

II. P ガ上ノ $P(x,E)$ デ定義サレタ（*Markoff chain* ノ場合）トキ，1 ガ P ノ固有値ニナル。コノトキ $\lambda_1 = 1$ トヲクト (3) ニ於ケル P_1 ハ

$$P_1(x,E) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} P^{(m)}(x,E)^{(1)}$$

ナル *kernel* デ定義サレル。コノ $P_1(x,E)$ ハ

$$(4)\begin{cases} P_1(x,E)=\sum_{i=1}^{l} c_i(x) f_i(E), \quad P\cdot f_i = f_i, \quad f_i(E) \geqq 0, \end{cases}$$

$c_i(x) \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{l} c_i(x) \equiv 1$, 且ツ互ニ disjoint ナ E_i ガ存在シテ $f_i(E_i)=1$, ($i=1,2,\cdots\cdots,l$)

但シ $f_i \in (\mathfrak{M})$ 且ツ $c_i(x)$ ハ bounded Borel measurable.

III. 同ジク Markoff chain ノ場合ニ P ノ絶對値 1 ノ固有値 λ_i ハ全テ 1 ノ root ニナル。

談話ノ80ニ於テハ III ノ証明ニ II ヲ essential ニ使ッテヰル。所ガ前号談話807ニ於テ，角谷氏ガ III ハ P ガ semi-ordered Banach space ノ positive operation ト云フ假定ノモトニ I カラ導カレルコトヲ示サレタ。誠ニ鮮ナ証明デアッタ!!.

§2. 本談話デノ結果

斯クシテクルト談話807ニ角谷氏ノ指摘サレタ如ク Markoff chain ヲ semi-ordered Banach space デ，(2) ヲ滿足スルト云フ假定ノ下ニ，norm 1 ノ positive operation トシテ相當程度迄抽象的ニ取扱フコトガ出來ル訳デアリマセン。實際ソレハ以前ノ談話ノ

---

(1) x, E ニ関スル一樣收斂ノ limit.

$$P^{(n)}(x,E)=\int P^{(n-1)}(x,dy)P(y,E),\quad P^{(1)}(x,E)=P(x,E)$$

所論ヲ検ベテミルトワカリマス。然シ II ガナイト精密ナ結果ヲ出セナイコトモ亦否メマセン。positive operation ト云フコトカラ或ル程度迄 II ニ類似ノコトハ出セルノデスガ，抽象的ニ扱フ以上仕方ガナイノデアリマセウ。

所ガモ一度ヨク考ヘテミルト，<u>semi-ordered Banach space</u> ト云フテモ吾々ハ頭ニ $(\mathfrak{M})$ 又ハ (L) ヲ描キツツ考ヘテヰル訳デアリマス。ソシテ之モ角谷氏ノ得ラレタ良キ結果[1]デアリマスガ

> 吾々ノ取扱フ semi-ordered Banach space ニ separable ト云フ假定ヲ入レルナラバ コノ Banach space ハ (L) ノ closed linear subspace ト考ヘテヨイ。

ノデアリマシタ。従ッテ抽象化トハ云フモノノ separability ヲ假定スル限リ (L) デ議論スレバヨイ。

> 所ガ (L) デアルナラバ P_1 ハ measurable ナ kernel $P_1(x, y)$ デ定義サレルコトガ証明サレル。
>
> $$P_1 \cdot f = g, \quad (f, g \in (L)), \quad g(y) = \int_0^1 f(x)\, P_1(x, y)\, dx$$

所ガ P ガ norm 1 ノ positive operation ト云フコトカラ I ヲ用ヒ $p(x, y) \geq 0$, $\int_0^1 p_1(x, y) = 1$ ガ云ヘル訳デス。又 P_1 ガ $PP_1 = P_1P = P^2 = P_1$ ヲ満足スルコト

(1) 帝國學士院記事 5号 (1939)

カラ，$(\mathfrak{M})$ ノトキト全ク同様ニシ

$$
\mathrm{II}'.\quad \left\{
\begin{array}{l}
p_1(x,y)=\sum_{i=1}^{l} c_i(x) f_i(y),\ \ P\cdot f_i = f_i,\ \ f_i(y)\geqq 0, \\[1em]
c_i(x)\geqq 0,\ \ \sum_{i=1}^{l} c_i(x)\equiv 1,\ 且\ f_i(y)\cdot f_j(y)\equiv 0\ \ (i\neq j), \\[1em]
\int_0^1 f_i(y)\,dy = 1 \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,l)
\end{array}
\right.
$$

ナル完全ニ II ニ對應シタコトガ云ヘマス。

從ツテ（L）デ (2) ヲ滿足スル norm 1 ノ positive operation ニツイテハ，以前 $(\mathfrak{M})$ デ (2) ヲ滿足スル Markoff chain ニツイテ得ラレタコトガ殆ンドソノママ <u>übertragen</u> サレマス。

但シ transition probability density $p(x,y)$ ハ與ヘラレナイノデスカラ、得ラレル結果ハ

> $\Omega=(0,1)$ ノ Borel 集合 $\mathfrak{A}$ ヲ任意ニトッタトキ之ガ時間ト共ニドノ樣ニ遷移シテユクカ？

トイフ議論ニナル訳デス。具体的ナ Markoff chain デハ $\mathfrak{A}$ ガ一点 x ニトレル所ガ都合ガヨイ訳デスガ，probabilistic ニハ上デ essential ニ？充分デアリマセウ。

兎ニ角，Banach 空間ニ separability ヲ假定スレバ，<u>(2) ヲ假定スル限リ</u>，マヅマヅ Markoff chain

ヲ抽象化シテモ essential ニハ新シイ結果ガ得ラレナイ。トヱフヨリハ寧ロ以前ノ結果ガ，完全連續性ヲ武器トスル（(2) ヲ假定スル）限リニ於テ、先ヅ々々 transition process ニ關シテ best ナモノデアッタト云ヘ樣ト思ヒマス。即チ Markoff chain ニ於テ (2) ヲ導入シタ Kryloff-Bogolioubofff ノ炯眼ハ称ヘラレテヨイ訳デス。(1)

§3. (5) ノ証明

大分ダラダラ永カッタデスカラ証明ノスヂ道ダケ述ベマス。N. Dunford (Integration and linear operations, Trans. Amer. Math. Soc. 40, 3 (1936), p. 483) ノ結果ヲ用ヒルノデス。

> Dunford ノ定理. (L) ノ (L) ヘノ連續ナ線型作用素 P_1 ニ對シテ次ノ如キ (x, y) ニ關シテ measurable ナ函數 $K_n(x, y)$ ノ系列ガ定ル.
>
> i) x ヲ fix スルト $K_n(x, y)$ ハ全テ y ニ關シテ integrable.

(1) K-B ノ compte Rendus ノ論文カラハ炯眼ト云フヨリハ glücklich ダッタトモ感ゼラレマス。何故カト云フト K-B ハ(2)ノ intrinsic ナ意味付（例ヘバ談話169ニ Doeblin ノ假定カラ(2)ノ出ルコトヲ吾々ハ示シタガ）ヲ全然與ヘラレナイノデスカラ。

ii) 線型寫像 $K_n \cdot f = g$, $g(y) = \int_0^1 f(x) K_n(x, y)\, dx$

ハ (L) ヲ (L) ノ n 次元ノ linear subspace

ニ寫ス。

iii) 任意ノ $f \in (L)$ ニ對シ

$$(6) \quad P_1 \cdot f = \underset{n \to \infty}{\text{strong limit}} \int_0^1 f(x) K_n(x, y)\, dx$$

之レカラ (5) ヲ導クニハ, P_1 ガ I ニヨリ完全連續ナ projection operator ($P_1^2 = P_1$) ダカラ, F. Riesz ノ定理[1] ニヨリ, P_1 ガ (L) ヲ (L) ノ有限次元ノ linear subspace ニ寫ス寫像ナルコトニ注意スレバヨイ。即チコノ事實ト ii) トヲ用ヒレバ (6) ノ收斂ガ $\|f\| \leqq 1$ ニ於イテ一様ナコトガワカル。コレヨリ (5) ヲ導クコトハワケハナイ。

—— 以上 ——

(注意) 實ハ 3, 4 号前ノ Bull. Am. Math. Soc. ニ J. Pettis ガ (L) ヲ (L) ヘウツス完全連續線型寫像ハ可測ナ kernel ニヨッテ定義サレルコトヲ證明ナシニ announce シテアリマス。アレヲ見タトキニ角谷君ト證明ヲ考ヘテ Dunford ノ定理カラコノ様ニシテ得ラレルト話シ合ッタコトガアリマシタ。アノトキニハ Markoff chain トノ關係ニ氣付カナカッタ次第デシタ。今ノ場合ハ特別ノ場合デスカラ尚易シイ訳デス。

---

(1) locally compact ナ Banach space ハ有限次元デアルト云フ定理.

序イデナガラ Dunford ノ定理ノ証明ノ方針ダケ述ベテ置キマセウ。

$\boxed{\text{方針}}$ -(L)ニハ base ガアル。即チ(L)ニ屬スル系列 $\{f_i\}$ ヲ適當ニトレバ任意ノ $f\in(L)$ ハ

$$f = \underset{n\to\infty}{\text{strong limit}} \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \qquad (c_i \text{ 常数})$$

ト unique ニ表ハサレル。コノ base トシテ有名ナ $\boxed{\text{haar ノ直交函数系}}$ ヲトレルコトハ知ラレテヰル[1]。c_i ハ明ニ(L)ノ上デノ連續ナ汎函數デアリマス：$c_i = F_i(f)$.

ソコデ $T\cdot f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(f) f_i$, $a_i(f) = F_i(T\cdot f)$. $a_i(f)$ モ亦(L)ノ上デノ連續ナ汎函數デアリマスカラ良ク知ラレタ F. Riesz ノ定理ニヨリ

$$a_i(f) = \int_0^1 \alpha_i(x) f(x)\, dx, \quad \alpha_i \in (M).$$

ヨッテ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) f_i = S_n(x)$ (各 x ニ對シテ y ノ函數 $\in(L)$) トヲケバ

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(f) f_i = \int_0^1 S_n(x) f(x)\, dx$$

コノ右辺ガ $\int_0^1 K_n(x,y) f(x)\, dx$ ト measurable kernel

(1) 例ヘバ Kaczmarz-Steinhaus: Theorie der Orthogonalreihen.

$K_{n}(x, y)$ デ書ケルト云フ所ガ Dunford ノ証明ニ於テ delicate ナ所ナノデス。之レハ Dunford ヲミテ頂クコトニシマス。