810. Markoff過程ニ関スル二三ノ結果，II

角谷 靜夫（阪大）

前回ニテハ Ω ヲ ergodic kernel (ergodic part) 及ビ dissipative part ニワケ得ルコトヲ証明シタ。今回ハ各々ノ ergodic kernel (ergodic part) ヲ更ニ分割スルコトヲ考ヘル。勿論條件 (K) ハ常ニ假定スルモノトスル。

以下ノ議論ニ於テハ、條件 (K) ノ下デ T ノ絶對値 1 ノ固有値 λ ガスベテ $\lambda^N=1$ ナル方程式ヲ滿足スルトイフ事實ガ essential ナ役割ヲ演ジル。コノコトハ既ニ前号ノ談話 807 ニテ証明シタカラ以下証明ナシニ用ヒルコトニスル。

條件 (K) ノ下デ T ノ絶對値 1 ノ固有値 λ ハ有限個シカナク、コレラハスベテ $\lambda^N=1$ ヲ滿足スルカラ（N ハスベテノ λ ニ共通）前号ノ定理 1 ノ分解式 (10) ニ於テ $n=N$ トオケバ

$$P^{(N)}(t,E)=\sum_{i=1}^{k}P_{\lambda_i}(t,E)+S^{(N)}(t,E)$$

トナル。ヨッテ $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}P_{\lambda_i}(t,E)=P_1^{*}(t,E)$

トオケバ

$$P^{(N)}(t,E)=P_1^{*}(t,E)+S^{(N)}(t,E) \tag{35}$$

(36) $$\int_\Omega P^{(N)}(t,ds)P_1^*(s,E)=\int_\Omega P_1^*(t,ds)P^{(N)}(s,E)$$

$$=\int_\Omega P_1^*(t,ds)P_1^*(s,E)=P_1^*(t,E)$$

(37) $$\int_\Omega P_1^*(t,ds)S(s,E)=\int_\Omega S(t,ds)P_1^*(s,E)=0$$

トナル。ヨッテ（35）ノ両辺ヲ iterate スルコトニヨリ

(38) $$P^{(nN)}(t,E)=P_1^*(t,E)+S^{(nN)}(t,E),\qquad n=1,2,\cdots\cdots$$

トナリ、且ツ

(39) $$\underset{t\in\Omega,\,E\subset\Omega}{\mathrm{l.u.b.}}\left|S^{(nN)}(t,E)\right|\leqq\frac{M}{(1+\varepsilon)^{nN}},\quad n=1,2,\cdots$$

又ハ

(40) $$\underset{t\in\Omega,\,E\subset\Omega}{\mathrm{l.u.b.}}\left|P^{(nN)}(t,E)-P_1^*(t,E)\right|\leqq\frac{M}{(1+\varepsilon)^{nN}},\qquad n=1,2,\cdots\cdots$$

ナル如キ常数 $M,\ \varepsilon>0$ ガ存在スル。

次ニ我々ハ kernel $P_1^*(t,E)$ ヲ考ヘル。然ルトキハ我々ガ前回ニ行ッタノト全ク同ジ議論ニヨッテ次ノ Lemma ガ成立スル。

$\boxed{\text{Lemma 5}}$ 條件（K）ノ下ガ T ノ絶對値1ノ固有値 λ ハスベテ $\lambda^N=1$ ヲ滿足スル（N ハスベテノ λ ニ共通）。

ミクルトキハ、コノ N ニ対シテ $\lim_{n\to\infty}P^{(nN)}(t,E)=P_1^*(t,E)$

ハ uniformly ニ存在シテ且ツ $P_1^*(t, E)$ ハ次ノ形ニ分解サレル：

$$(41)\quad P_1^*(t, E) = \sum_{i=1}^{L} y_i^*(t)\, x_i^*(E)$$

コヽニ $\{x_i^*(E)\}$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, L)$ ハ $(\mathfrak{M})$ ノ element ノ system デ

$$(42)\quad T^N(x_i^*) = x_i^*,\quad x_i^* \geqq 0,\quad x_i^*(\Omega) = 1,$$
$$x_i^* \wedge x_j^* = 0 \quad (i \neq j)$$

ヲ満足シ，且ツ

$$(43)\quad T^N(x^*) = x^*,\quad x^* \geqq 0,\quad x^*(\Omega) = 1$$

ヲ満足スル任意ノ $x^* \in (\mathfrak{M})$ ハ

$$(44)\quad x^*(E) = \sum_{i=1}^{L} c_i^* x_i^*(E),\quad c_i^* \geqq 0,\quad \sum_{i=1}^{L} c_i^* = 1$$

ナル形ニ unique ニ表ハサレル。更ニ $\{y_i^*(t)\}$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, L)$ ハ (M^*) ノ element ノ system デ

$$(45)\quad \overline{T}^N(y_i^*) = y_i^*,\quad y_i^* \geqq 0,\quad \sum_{i=1}^{L} y_i^*(t) = 1$$

ヲ満足シ，且ツ

$$(46)\quad \overline{T}^N(y^*) = y^* \quad (y^* \geqq 0)$$

ヲ満足スル任意ノ $y^* \in (M^*)$ ハ

$$(47)\quad y^*(t) = \sum_{i=1}^{L} d_i^* y_i^*(t) \quad (d_i^* \geqq 0)$$

ナル形ニ unique ニ表ハサレル。

次ニ、コノ $x_i^*(E)$, $y_i^*(t)$ ヲ使ッテ ergodic kernel (ergodic part) ヲ更ニ分割スルコトヲ考ヘル。

先ヅ $y_i^*(t)=1$ ナル如キ $t\in\Omega$ 全体ノ集合ヲ $\overline{E}_i^*$ ニテ表ハシ、コレヲ <u>subergodic part</u> ト名ヅケル。明カニ $\overline{E}_i^*$ ハ何レモ Borel 集合デ且ツ互ニ共通点ヲモタナイ。且ツ前回ト全ク同様ニシテ（(50) ノ式ノ右辺ハ前回ノ (30) ノ右辺ト異ナルコトニ注意）

$$(48)\quad x_i^*(\overline{E}_j^*)=1 \quad (i=j),\ =0\ (i\neq j)$$

$$(49)\quad P^{(N)}(t,\overline{E}_i^*)=1,\quad t\in\overline{E}_i^*$$

$$(50)\quad \underset{t\in\overline{E}_i^*,\,E\subset\Omega}{\text{l.u.b.}}\left|P^{(nN)}(t,E)-x_i^*(E)\right|\leqq\frac{M}{(1+\varepsilon)^n},$$

$$n=1,2,\text{-------}$$

（M, $\varepsilon>0$ ハ常数）トナルコトガワカル。シカシ我々ハ更ニ精密ニ、次ノ定理ヲ証明スルコトガ出来ル。

$\boxed{\text{定理 5}}$ $\overline{E}_1^*,\overline{E}_2^*,\text{-----},\overline{E}_L^*$ ノ全体ハ l 個ノ class ニ分レル。（l ハ定理2及ビ Lemma 3 ニテ現ハレタト同ジ l デアル）コレヲ

$$C_\alpha\equiv\left(\overline{E}^*_{\alpha_1},\overline{E}^*_{\alpha_2},\text{-----},\overline{E}^*_{\alpha_{d_\alpha}}\right)\quad(\alpha=1,2,\text{-----},l)$$

トセヨ。コヽニ d_α ハ N ノ約数ニテ $\sum_{\alpha=1}^{l}d_\alpha=L$ デアル。

且ツコレラハ（$\alpha_1,\alpha_2,\text{-----},\alpha_{d_\alpha}$ ノ順序ヲ適当ニツケレバ）

$$(51)\quad P(t,\overline{E}^*_{\alpha_{i+1}})=1,\quad t\in\overline{E}^*_{\alpha_i},\quad i=1,2,\text{-----},d_\alpha$$

$$(\alpha_{d_\alpha+1}=\alpha_1)$$

$$(52)\quad \underset{t\in \bar{E}^*_{\alpha_i},\ E\subset\mathfrak{B}}{\mathrm{l.u.b.}}\left|P^{(nd_\alpha)}(t,E)-x^*_{\alpha_i}(E)\right|\leqq\frac{M}{(1+\varepsilon)^n}$$

$$n=1,2,\cdots\cdots$$

ヲ満足スル。更ニ、コノ class C_α ($\alpha=1,2,\cdots\cdots,l$) ハ ergodic part $\bar{E}_\alpha$ ($\alpha=1,2,\cdots\cdots,l$) ト一對一對應ヲナシ、對應スルモノヲ同ジ suffix ニヨツテ表ハセバ $\bar{E}^*_{\alpha_i}$ ($i=1,2,\cdots\cdots,d_\alpha$) ハスベテ $\bar{E}_\alpha$ ニ含マレル。且ツ

$$(53)\quad T(x^*_{\alpha_i})=x^*_{\alpha_{i+1}},\quad i=1,2,\cdots\cdots,d_\alpha\ (\alpha_{d_\alpha+1}=\alpha_1)$$

$$(54)\quad \bar{T}(y^*_{\alpha_{i+1}})=y^*_{\alpha_i},\quad i=1,2,\cdots\cdots,d_\alpha\ (\alpha_{d_\alpha+1}=\alpha_1)$$

$$(55)\quad x_\alpha(E)=\frac{1}{d_\alpha}\sum_{i=1}^{d_\alpha}x^*_{\alpha_i}(E)$$

$$(56)\quad y_\alpha(t)=\sum_{i=1}^{d_\alpha}y^*_{\alpha_i}(t)$$

ガ成立スル。

證明ニハイル前ニ二,三ノ注意ヲ與ヘル。先ヅ (51) ハ各々ノ α ニ對シテ $\bar{E}^*_{\alpha_1}+\bar{E}^*_{\alpha_2}+\cdots\cdots+\bar{E}^*_{\alpha_{d_\alpha}}$ 内ノ点 t ガ $\bar{E}^*_{\alpha_1}$, $\bar{E}^*_{\alpha_2}$, $\cdots\cdots$, $\bar{E}^*_{\alpha_{d_\alpha}}$ 内ヲ cyclically ニ遷移サレルコトヲ意味スル。且ツ (52) ハ コレラノ点ニ對シテ $P^{(d_\alpha)}(t,E)$ ナル Markoff 過程ヲ考ヘレバ、ソノ n-th iterate $P^{(nd_\alpha)}(t,E)$ ガ $n\to\infty$ ナルトキニ<u>一様收斂</u>スルコトヲ意味シテヰル。

各々ノ $\bar{E}^*_{\alpha_i}$ ハ $\bar{E}_\alpha$ ニ含マレテヰルカラ $\bar{E}^*_{\alpha_1}+\bar{E}^*_{\alpha_2}+\cdots\cdots+\bar{E}^*_{\alpha d_\alpha}$ ガ $\bar{E}_\alpha$ ノ部分集合トナルコトハ明カデアルガ $\bar{E}_\alpha$ トハ必ズシモ一致シナイ。實際 $D_\alpha=\bar{E}_\alpha-\sum_{i=1}^{d_\alpha}\bar{E}^*_{\alpha_i}$ ヲ作レバ D_α ハ $i=1,2,\cdots\cdots,d_\alpha$ ニ對シテ $y^*_{\alpha_i}(t)<1$ トナル如キ $t\in\bar{E}_\alpha$ 全体ノ集合デ、コレハ必ズシモ空集合トハナラナイノデアル。シカシ、以下ノ證明ヲ見レバワカル如ク、我々ハ(52)ヲ證明シタノト全ク同ジ方法デ

$$(57)\quad \underset{t\in\bar{E}_\alpha,\,E\subset\Omega_0}{l.u.b.}\left|P^{(nd_\alpha)}(t,E)-\sum_{i=1}^{d_\alpha}y^*_{\alpha_i}(t)\,x^*_{\alpha_i}(E)\right|$$

$$\leqq\frac{M}{(1+\varepsilon)^n},\quad n=1,2,\cdots\cdots$$

(M, $\varepsilon>0$ ハ常數)ヲ證明スルコトガ出來ル。

$\boxed{\text{定理5ノ證明}}$ $T^N T'(x^*_i)=TT^N(x^*_i)=T(x^*_i)$ ナルコトヨリ x^*_i ハ條件(42)ヲ滿足スル，シタガッテ

$$(58)\quad T(x^*_i)=\sum_{j=1}^{L}c_{ij}\,x^*_j,$$

ナル如キ $c_{ij}\geqq 0$, $\sum_{j=1}^{L}c_{ij}=1$ ナル如キ常數 $\{c_{ij}\}$ $(i,j=1,2,\cdots\cdots,N)$ ガ存在スル。コレヨリ T ハ $(x^*_1,x^*_2,\cdots\cdots,x^*_L)$ ナル *system* ニ對スル *linear Transformation* (又ハ *finite case* ノ *Markoff process*) ト考ヘルコトガ出來ル。シカルニ $T^N(x^*_i)=x^*_i$, $i=1,2,\cdots\cdots,N$ デアルカラ、コノ *linear transformation* ハ N 回繰返ヘシテ施セバ *identical transformation*

トナル。即チ matrix $C=(c_{ij})$ $(i,j=1,2,\cdots\cdots,N)$ ヲ考ヘレバ，コレハ

(59) $C^N=$ unit matrix

ナル関係ヲ満足スル。我々ハ先ヅコノ matrix C ガ 0 ト 1 ノミヨリ成ル matrix デ $(x_1^*, x_2^*, \cdots\cdots, x_L^*)$ ノ間ノ permutation ヲ與ヘルモノ（即チ各行及ビ各列ニハ 1 ハ一ツ、且ツ唯一ツデ残リハ全部 0 トナル matrix）デアルコトヲ示サウ。

實際 $c_{ij}^{(N-1)}$ ニヨッテ C^{N-1} ノ i,j-element ヲ表ハセバ

$$\sum_{k=1}^{L} c_{ik}^{(N-1)}=1,\quad \sum_{k=1}^{L} c_{ik}^{(N-1)}\,c_{ki}=1$$

$i=1,2,\cdots\cdots,L$ ヲ満足スル。然ルニ $0\leqq c_{ki}\leqq 1$ ガ常ニ成立スルノデアルカラ、コノ二ツガ同時ニ成立スルタメニハ各々ノ i ニ對シテ少クトモ一ツノ c_{ki}（例ヘバ $c_{k_i i}$）ガ 1 ニヒトシクナケレバナラナイ。換言スレバ matrix $C=(c_{ij})$ ノ各 column ハ少クトモ一ツノ 1 ヲモタネバナラヌ。然ルニ $\sum_{i=1}^{L} c_{k i}=1$ デアルカラ $i\neq j$ ナルトキ $k_i\neq k_j$ デナケレバナラヌ。

シタガッテ $(k_1, k_2, \cdots\cdots, k_L)$ ハ $(1,2,\cdots\cdots,L)$ ノ一ツノ permutation トナリ．$c_{ki}\,i=0$ for $k\neq k_i$ トナル。

此ノ如クシテ C ガ index $1,2,\cdots\cdots,L$ ノ間ノ permutation ヲ與ヘルコトヲ知ッタ。ヨッテ $1, 2, \cdots\cdots, L$ ハ l' 個 ($l' \leqq L$) ノ class K_α ($\alpha = 1, 2, \cdots\cdots, l'$) ニワカレテ、ソノ各々ガ matrix C ニヨッテ cyclic ニ permute サレル。($l = l'$ トナルコトハマダワカラヌ) K_α ニ含マレル index ノ數ヲ d_α トスレバ (59) ヨリ d_α ハ N ノ約數デアル。更ニ class K_α ニ屬スル index ヲ適當ニナラベテ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_{d_\alpha}$ トスレバ $C_{\alpha_i \alpha_{i+1}} = 1$ 又ハ $T(x^*_{\alpha_i}) = x^*_{\alpha_{i+1}}$ ($i = 1, 2, \cdots\cdots d_\alpha$; $\alpha_{d_{\alpha+1}} = \alpha_1$) トナル。

我々ハ次ニ $l = l'$ トナリ、且ツ class K_α ト ergodic part K_α トノ間ニ one-to-one correspondence ガツクコトヲ證明シヨウ。

先ヅ前回ノ Lemma 3, (20) ヨリ各々ノ x_α ガ $T(x_\alpha) = x_\alpha$ ヲ滿足スルコトカラ $T^N(x_\alpha) = x_\alpha$ ガ成立スル。且ツ $x_\alpha \geqq 0$, $x_\alpha(\Omega) = 1$ ハ勿論成立スルカラ x_α ハ (43) ヲ滿足シ、シタガッテ Lemma 5 ニヨリ

$$x_\alpha(E) = \sum_{i=1}^{L} c^*_i x^*_i(E)$$

ト表ハスコトガ出來ル。今 $\sum_{i=1}^{L}$ ヲ各々ノ class K_α ニ於ケル和ニ分ケルト

$$(60) \quad x_\alpha(E) = \sum_{\alpha=1}^{l'} \sum_{i=1}^{d_\alpha} c^*_{\alpha_i} x^*_{\alpha_i}(E)$$

トナル。コノトキ、アル class K_α ガ定マッテ $\alpha_i \in K_\alpha$

ナルトキ $c^*_{\alpha_i}=\frac{1}{d_\alpha}$, $\alpha_i \bar{\in} K_\alpha$ ナルトキ $c^*_{\alpha_i}=0$ トナルコトヲ示サウ。先ヅ $c^*_{\alpha_i}$ ハ各々ノ K_α ニ於テ i ニ無関係デアル。何トナレバ (60) ノ両辺ニ Γ ヲ施セバ $\Gamma(x_\alpha)=x_\alpha$ ナルコトヨリ

$$x_\alpha(E)=\sum_{\alpha=1}^{l'}\sum_{i=1}^{d_\alpha} c^*_{\alpha_i}\, x^*_{\alpha_{i+1}}(E)$$

トナリ、(60) ノ表現ガ unique ナルコトヨリ $c_{\alpha_{i+1}}=c_{\alpha_i}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,d_\alpha)$ $(\alpha_{d_\alpha+1}=\alpha_1)$ ヲ得ルカラデアル。

次ニ $c^*_{\alpha_i}>0$ トナル如キ α_i ハスベテ同ジ class ニ属スル。何トナレバ、モシカヽル class ガ少クトモニツ存在スレバ x_α ヲニツノ部分ニワケテ

$$x_\alpha=x'_\alpha+x''_\alpha,\quad x'_\alpha\geqq 0,\quad x''_\alpha\geqq 0,\ x'_\alpha\wedge x''_\alpha=0.$$
$$\Gamma(x'_\alpha)=x'_\alpha,\quad \Gamma(x_\alpha)=x''_\alpha$$

トナル如クスルコトガ出来ル。

ヨツテ今 $x_{\alpha_1}=x'_\alpha/\|x'_\alpha\|$, $x_{\alpha_2}=x''_\alpha/\|x''_\alpha\|$ トオケバ $(l+1)$ 個ノ element $x_1, x_2,\cdots\cdots, x_{\alpha-1}$, $x_{\alpha 1}$, $x_{\alpha 2}$, $x_{\alpha+1},\cdots\cdots, x_l$ ハ (20) ヲ満足スル。コレハ l ガカヽル element ノカズノ maximum デアルトイフ定義ニ矛盾スル。ヨツテ $c^*_{\alpha_i}>0$ ナル如キ α_i ハスベテ同ジ class ニゾクスル。コノ class ヲ K_α トセヨ。

此ノ如クシテ (60) ガ

$$x_\alpha(E)=c_\alpha\sum_{i=1}^{d_\alpha} x^*_{\alpha_i}(E)$$

ト云フ形ニ表ハサレルコトガワカッタ。ココニ C_α ハ i ニ無関係ナ常数デアル。然ルニ $x_\alpha(\Omega)=1$, $x^*_{\alpha_i}(\Omega)=1$ $(i=1,2,\cdots\cdots,d_\alpha)$ デアルカラ $C_\alpha=\dfrac{1}{d_\alpha}$ デナケレバナラナイ。即チ (55) ガ証明サレタ。

以上ノ如クシテ、各々ノ $x_\alpha(E)$ $(\alpha=1,2,\cdots\cdots,l)$ ニ對シテ class K_α ガ定マッテコレニ対シテ (55) ガ成立スルコトガワカッタ。(ヨッテ $l\leqq l'$ トナルコトモワカッタ。)

逆ニ任意ノ class K_α ニ對シテ $x(E)=\dfrac{1}{d_\alpha}\sum\limits_{i=1}^{d_\alpha}x^*_{\alpha_i}(E)$

トオケバ $x(E)$ ハ Lemma 3 ノ條件 (21)

$$(T(x)=x,\ x\geqq 0,\ x(\Omega)=1)$$

ヨッテ

$$x(E)\equiv\frac{1}{d_\alpha}\sum_{i=1}^{d_\alpha}x^*_{\alpha_i}(E)=\sum_{\beta=1}^{l}c_\beta x_\beta(E)$$

ナル如キ c_β $(\beta=1,2,\cdots\cdots,l)$ ガ存在スル。コノ式ニ更ニ既ニ証明シタ関係 (55) ヲ使ヘバ

$$\frac{1}{d_\alpha}\sum_{i=1}^{d_\alpha}x^*_{\alpha_i}(E)=\sum_{\beta=1}^{l}\frac{c_\beta}{d_\beta}\sum_{i=1}^{d_\beta}x^*_{\beta_i}(E)$$

トナル。然ルニ $x^*_{\alpha_i}(E)$ ハ linearly independent デアルカラ、コレガ成立スルタメニハ $C_\alpha=1$, $c_\beta=0$ $(\beta\neq\alpha)$ デナケレバナラナイ。即チ任意ノ class K_α ニ対シテ

$x(E)=\dfrac{1}{d_\alpha}\sum\limits_{i=1}^{d_\alpha}x^*_{\alpha_i}(E)$ ヲ作ルトコレハ Lemma 3

デ定メラレタ system $\{x_\alpha(E)\}$ $(\alpha=1,2,\cdots\cdots,l)$ ノウチノーツトナッテキル。(ヨッテ $l'\leqq l$ ヲ得ル)。

以上ノコトヨリ $l=l'$ ニテ且ツ Lemma 3 ニ於ケル system $\{x_\alpha(E)\}$ $(\alpha=1,2,\cdots\cdots,l)$ ト class K_α $(\alpha=1,2,\cdots\cdots,l)$ トノ間ニ一對一對應ガツキ

$$x_\alpha(E)=\frac{1}{d_\alpha}\sum_{i=1}^{d_\alpha}x^*_{\alpha_i}(E)$$

トナルコトガワカッタ。コレハ又 ergodic part (kernel) ト class K_α トノ間ノ對應トモ考ヘラレル。

サテ、我々ノ目的ハ定理5ノ証明デアルガ、コノ中既ニ(53),(55)ガ証明サレタ。ヨッテ後ニ残ルハ(51),(52),(54),(56)ノ証明デアル。

先ツ(56)ヲ証明スル。コノタメニ關係

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\int_\Omega P_1^*(t,ds)\,P^{(m)}(S,E)=\mathrm{P}_1(t,E)$$

ヨリ出発スル。前ノ定理2ノ関係(23)及ビ(41)ヲ使ヘバ、コレハ

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{i=1}^{d_\alpha}y^*_{\alpha_i}(t)\left(\int x^*_{\alpha_i}(ds)\,P^{(m)}(S,E)\right)$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{l}y_\alpha(t)\,x_\alpha(E)$$

トナリ、(53)ヲ使ヘバ

$$\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{i=1}^{d_\alpha} y^*_{\alpha_i}(t)\, x^*_{\alpha\, i+m}(E)$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{l} y_\alpha(t)\, x_\alpha(E)$$

トナル. 更ニ d_α ガ N ノ約数ナルコトヲ使ヘバ、コレハ

$$\sum_{\alpha=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{d_\alpha} y^*_{\alpha_i}(t)\right)\left(\frac{1}{d_\alpha}\sum_{i=1}^{d_\alpha} x^*_{\alpha_i}(E)\right)$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{l} y_\alpha(t)\, x_\alpha(E)$$

トナル、ヨッテ (53) ヨリ

$$\sum_{\alpha=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{d_\alpha} y^*_{\alpha_i}(t)\right) x_\alpha(E)=\sum_{\alpha=1}^{l} y_\alpha(t)\, x_\alpha(E)$$

コレヨリ、$E=E_\alpha$ トオケバ (56) ガ得ラレル.

次ニ (54) ヲ証明スルタメニ trivial relation

$$\int_\Omega P(t,dS)\, P^*_1(S,E)=\int_\Omega P^*_1(t,dS)\, P(S,E)$$

ヨリ出発スル (41) 及ビ (53) ヨリ、コレハ

$$\sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{i=1}^{d_\alpha}\left(\int_\Omega P(t,dS)\, y^*_{\alpha_i}(S)\right) x^*_{\alpha_i}(E)$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{i=1}^{d_\alpha} y^*_{\alpha_i}(t)\left(\int_\Omega x^*_{\alpha_i}(dS)\, P(S,E)\right)$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{l}\sum_{i=1}^{d_\alpha} y^*_{\alpha_i}(t)\, x^*_{\alpha_{i+1}}(E)$$

トナリ、$E=\overline{E}^*_{\alpha_i}$ トオケバ (54) ヲ得ル.

(51) ハ (54) ヨリ直チニ得ラレルカラ、後ニ残ッタ (52) ヲ証明スレバ定理ノ証明ハ完結スル ($\overline{E}^{*}_{\alpha_i}$ ガ $\overline{E}_{\alpha}$ ニ含マレルコトハ (56) ヨリ明カデアロウ)

最後ニ (52) ヲ証明スル。コノタメニハ任意ノ integer n, k ニ対シテ

$$P^{(nN+kd_\alpha)}(t,E)=\int_\Omega P^{(nN)}(t,ds)P^{(kd_\alpha)}(s,E)$$

$$=\int_\Omega P^{*}(t,ds)P^{(kd_\alpha)}(s,E)+\int_\Omega S^{(nN)}(t,ds)P^{(kd_\alpha)}(s,E)$$

トナルコトヨリ出発スル。$t\in\overline{E}^{*}_{\alpha_i}$ ナルトキハ右辺第一項ハ

$$\int_\Omega P^{*}_{1}(t,s)P^{(kd_\alpha)}(s,E)=\int_\Omega x^{*}_{\alpha_i}(ds)P^{(kd_\alpha)}(s,E)=x^{*}_{\alpha_i}(E)$$

トナリ右辺第二項ハ任意ノ $t\in\Omega$, $E\in\Omega$ ニ対シテ

$$\left|\int_\Omega S^{(nN)}(t,ds)P^{(kd_\alpha)}(s,E)\right|$$

$$\leqq \underset{t\in\Omega,\,E\subset\Omega}{\mathrm{l.u.b.}}\left|S^{(nN)}(t,E)\right|\leqq\frac{M}{(1+\varepsilon)^{nN}}$$

トナル。ヨッテ $t\in\overline{E}^{*}_{\alpha_i}$ ナルトキ

$$\left|P^{(nN+kd_\alpha)}(t,E)-x^{*}_{\alpha_i}(E)\right|\leqq\frac{M}{(1+\varepsilon)^{nN}}$$

右辺ハ k ニ無関係ナル故、コレヨリ $k=1,2,\cdots\cdots,\frac{N}{d_\alpha}$ トオクコトニヨリ (M, ε ヲ適当ニカヘレバ) (52) ガ成立スルコトガワカル。

以上デ定理5ノ証明ガ終ル。

更ニ定理4ト全ク同ジヤウニシテ各々ノ $E^*_{\alpha_i}$ ノ中ニ subergodic kernel $E^*_{\alpha_i}$ ヲトッテコレガ

(61) $\quad P(t, E^*_{\alpha_{i+1}}) = 1, \quad t \in E^*_{\alpha_i}$

ヲ満足スルヤウニスルコトガ出来ルコトガワカル。

コレラノ $E^*_{\alpha_i}$ ハ何レモ measure zero ノ集合ヲ除イテ定マルノデアルガ、適當ニコレヲ定メレバ、更ニ

(62) $\quad E_\alpha = \sum_{i=1}^{d_\alpha} E^*_{\alpha_i}, \quad E^*_{\alpha_i} = E_\alpha \cdot E^*_{\alpha_i}$

ガ成立スルヤウニナシ得ルコトガワカル。E_α 及ビ $E^*_{\alpha_i}$ ガ Doeblin ノ定義シタ ensemble final 及ビソノ sousensemble cyclique デアル。

最後ニ定理4ノ後ノ注意デ約束シタ定理ヲ証明シヨウ。

$\boxed{\text{定理6}}$ $\quad \underset{t \in \Omega}{\text{l.u.b.}}\, P^{(n)}(t, \Delta) \leqq \dfrac{M}{(1+\varepsilon)^n},$

$n = 1, 2, \cdots\cdots$

ナル常数 $M, \varepsilon > 0$ ガ存在スル。

証明。 (40) ニ於テ $E = \Delta$ トオケバ

$$P_1^*(t, \Delta) = \sum_{\alpha=1}^{l} \sum_{i=1}^{d_\alpha} y^*_{\alpha_i}(t)\, x^*_{\alpha_i}(\Delta) \equiv 0$$

ナルコトヨリ

$$\underset{t \in \Omega}{l.u.b.}\ P^{(nN)}(t, \Delta) \leqq \frac{M}{(1+\varepsilon)^{nN}},\ n = 1, 2, \cdots\cdots$$

トナル。然ルニ $P^{(n)}(t, \Delta)$ ハ n ニ對シテ monotone decreasing デアルカラ、(コレハ一度 Δ ヨリ外ヘ出タ点ハ決シテ Δ ニカヘラナイコトヨリワカル) M, ε ヲ適當ニカヘレバ

$$\underset{t \in \Omega}{l.u.b.}\ P^{(n)}(t, \Delta) \leqq \frac{M}{(1+\varepsilon)^{n}},\ n = 1, 2, \cdots\cdots$$

トナル。