809. Homologiegruppe ト isomorph ナ Homotopiegruppe ヲ持ツ Komplex ニ就イテ

小松　醇郎（阪大）

Komplex K^n ノ Zyklus ガ凡テ Sphäre 又ハ Sphärisch[1] デアルコトヲ何カデ Charakterise 出来ナイモノカ？ ト云フ問題ガ出発デアル。斯様ナ問題ヲ提出シタ理由ハ，Zyklus ガ凡テ Sphäre デアル Komplex ハ一ツノ著シイ性質ヲ持ツカラデアル。ソレハ斯様ナ K^n ノ任意ノ Teilkomplex K^r ノ S^r ヘノ normale Abbildung ハ常ニ K^n マデ erweitern 出来ル。

コノ逆ガ成立スルナラバ此ノ性質デ Charakterise 出来ル理デアルガソウハ行カナイラシイ。

---

1) Sphäre ト等シイ Homotopie Typus ヲ持ツ Komplex ノ意味デ使フ。

整係数ノ Homologiegruppe ガ Homotopiegruppe ト isomorph[2] ナラバ Zyklus ハスベテ Sphäre ノ Bild ト考ヘノレルカラ上ノ性質ハ成立スルノデハナイカト想像サレル、コレハ以下証明スル如ク肯定サレタノデアルガ今度ハ Homologiegruppe ト Homotopiegruppe ト isomorph ナ Komplex ノ Zyklus ハ凡ベテ Sphärisch デアルカ? ト云フ問題モ生ズル. 此ノ問題ガ肯定サレルナラバ以下ノ証明ハ trivial ニナル理デアル。

Homotopiegruppe ノ Homologiegruppe ノ中ヘノ對應 Θ.

Homotopiegruppe $\pi_i(K^n)$ ノ一ツノ元 α ハ S^i (Sphäre) ノ Bild. 從ツテ i 次元 Homologiegruppe ノ一ツノ Zyklus Z^i ト考ヘラレル。コノ對應 $\alpha \longrightarrow Z^i$ ヲ Θ デ表ハス、Θ ハ homomorph in デアル。

定理. Komplex K^n ハ對應 Θ ガ常ニ isomorph auf デアル。r 次元 Teilkomplex K^r ノ S^r ヘノ normal abbildung[3] f ハ常ニ K^n 迄 erweitern 出来ル。

---

2) 何等カノ對應デ isomorph ト云フノデハナク或ル定マツタ對應デ isomorph ト云フノデアル。

3) …… ハ次頁ヘ ……

証明.　$f: K^r \longrightarrow S^r$ ガ normal、従ッテ各 $(r+1)$ 次元単体 T^{r+1} マデ erweitern 出来ル. 従ッテ $(r+2)$ 次元 0-Zyklus (Hindernis) f^{r+2} ガ出来ル. 即チ

$$\dot{T}_i^{r+2} \longrightarrow S^r : \alpha_i \in \pi_{r+1}(S^r)$$

ヨリ

$$f^{r+2}(T_i^{r+2}) = \alpha_i .$$

今 $B_u^{r+2}(K^n, \mathfrak{G})$ ノベッチ数 b, Torsionszahl $p_1, \cdots\cdots, p_j$ トスル. 別ニ $b+j$ 個ノ $(r+2)$-Sphären ヲトリ一点デ Zusammenhängend ナラシメル. ソノ内 j 個ノ Sphären ハ夫々 $p_1, \cdots\cdots, p_j$ 回加ヘレバ berandend スルヤウニ $(r+3)$ 次元 Polyeder ヲ作ル[4]. 此ノ Komplex ヲ $\overline{K}^{r+3}$ トスレバ

$$B_u^{r+2}(K^n, \mathfrak{G}) \approx B_u^{r+2}(\overline{K}^{r+3}, \mathfrak{G}).$$

サテ $B_u^{r+2}(K^n, \mathfrak{G})$ ノ上ノ Basis ヲ作ル $b+j$ 個ノ Zyklen ハ K^n ノ仮定カラ凡テ Sphärenbild ヲトレル. 従ッテ $\overline{K}^{r+3}$ ノ Basis ヲナス $b+j$ 個ノ Sphären ヲ Urbild トシテ連続変換ヲ作ル. ソノ際 Torsionszahl p_j ノ Zyklus Z_j ニハ $\overline{K}^{r+3}$ ノ Torsionszahl p_j

---

3) K^n デ berandend スル Zyklus Z^r ハ凡テ f ニヨッテ Abbildungsgrad 0 ニ移ッテ居ルモノ. 係数群ハ整数.

4) 是ハ常ニ可能. $(r+3)$ 次元 Vollkugel ヲ p_j 回回転シソノ表面上デダケ移ッタ点ヲ identifizieren スレバ良イ.

ノ *Sphäre* カラ移ルヤウニ作ル．コノ変換ハ $\overline{K}^{r+3}$ 全体ニ *erweitern* 出来ル．Z_j ハ *Homotopiegruppe* ノ元トシテモ P_j 倍スレバ 0．即チ *homotop* 0 ナノダカラ是ハ出来ル．

此ノ $\overline{K}^{r+3}$ ヲ凡テノ次元 r ニツキ作リ加ヘタ *Komplex* ヲ $\overline{K}^n$ トスル．

$\overline{K}^n$ ノ *Zyklus* ハ凡テ *Sphäre* デアリ、且ツ整係数ノベッチ群ヲ *isomorph* ニ対応スルヤウナ連続変換

$$\varphi(\overline{K}^n) \subset K^n$$

が作レタ．操作カラ分ルヤウニベッチ群ハ又任意ノ $\mathfrak{O}_m$ ヲ係数トシテモ *isomorph auf* デアル．

$$B_u^{r+2}(K^n, \mathfrak{O}_m) \approx B_u^{r+2}(\overline{K}^n, \mathfrak{O}_m)$$

従ツテ任意ノアーベル群ヲ係数トシテモ *isomorph auf* デアル．

P_1 ヲ *mod. 1* デ *reduzieren* シタ実数群トシ之ニ関シテ $\pi^{r+1}(S^r)$ ノ *Charakterengruppe* ヲ $\pi^{r+1}(S^r)^*$ ト表ス．

$$B_u^{r+2}(K^n, \pi^{r+1}(S^r)^*) \approx B_u^{r+2}(\overline{K}^n, \pi^{r+1}(S^r)^*)$$

従ッテ又 *0-Betti* 群ニ関シテモ

$$B_0^{r+2}(K^n, \pi^{r+1}(S^r)) \approx B_0^{r+2}(K^n, \pi^{r+1}(S^r))$$

今 $\overline{K}^n \xrightarrow{\varphi} K^n$ ヲ *simpliziale Abbildung* トシ $\overline{K}^n$ ノ中ヂ凡テノ r 次元 *Simplex* カラ成ル *Teilkomplex* ヲ $\overline{\overline{K}}^r$（$\overline{K}^r$ トハ異ル）トスレバ

$$\varphi(\overline{\overline{K}}^n) \subset K^n$$

$f: K^n \longrightarrow S^r$ ガ normal ナラバ

$f\varphi: \overline{\overline{K}}^n \longrightarrow S^r$ ハ又 normal トナル。從ッテ又 $\overline{K}^n$ ニテ $(r+2)$ 次元 0-Zyklus (Hindernis) $\overline{f}^{n+2}$ ガ生ズル。

此ノ $\overline{f}^{n+2}$ ハ Simpliziale Abbildung $\varphi: \overline{\overline{K}}^{r+2} \longrightarrow K^{r+2}$ ニヨッテ，K^{r+2} ノ 0-Zyklus f^{n+2} ニ對應シタモノデアル。

$$\varphi: f^{n+2} \longrightarrow \overline{f}^{n+2}$$

然ルニ $\overline{K}^n$ ノ oberer Zyklus (Hindernis) $\overline{f}^{n+2} \sim 0$ デアル。$\overline{K}^n$ ノ Zyklus 凡テ Sphäre デアルカラ。

從ッテ φ ニヨル 0-Betti 群ノ對應ガ isomorph デアッタ。

$$B_0^{n+2}(K^n, \pi^{r+1}(S^r)) \approx B_0^{n+2}(\overline{K}^n, \pi^{r+1}(S^r)).$$

故ニ $\overline{f}^{n+2} \sim 0$ ナラ $f^{n+2} \sim 0$

即チ K^n ノ $K^r \xrightarrow{f} S^r$ ガ normal Abbildung ナラバ Hindernis $f^{n+2} \sim 0$.

f ノ K^{r+1} 迄ノ Erweiterung ヲ適當ニトレバ

$$f^{n+2} \equiv 0$$

從ッテ f ハ K^{n+2} 迄 Erweiterung 出来ル。

以上

此ノ定理ノ特別ノ場合，例ヘバ K^n ヲ Poincaré ノ集合体，或ヒハモ少シ一般ニシテ S^n ト等シイ Homotopietyzus ヲ持ツ Komplex トスレバ矢張リ成立スル。

定理。 球面 S^n ト等シイ Homotopietyzus ヲ持ツ Komplex K^n ノ r 次元 Teilkomplex K^r トスレバ任意ノ normale Abbildung $f = K^r \to S^r$ ハ K^n 全体ニ Erweiterung 出来ル。