805. Banach ノ或ル問題ニツイテ

小松崎　均（北大）

S. Banach ハ彼ノ著書[1]ノ巻末ニ次ノ様ナ問題ヲ掲ゲテ居ル：

（脚註）次頁ヘ.

type (B) ノ空間ノ任意ノ closed linear manifold $\mathfrak{M}$ ニ對シ、空間 (B) ノ任意ノ element f ガ uniquely ニ $f = g + h$, $g \in \mathfrak{M}$, $h \in \mathfrak{N}$ トナルヤウナ closed linear manifold $\mathfrak{N}$ ガ元ノ空間ニ存在スルカ?

空間 (B) ガ特ニ $(L^{(2)})$ ノトキハ肯定デ、(L), (l), $(L^{(p)})$ $2 \neq p > 1$, $(l^{(p)})$ $2 \neq p > 1$ ノトキハ否定デアルコトガ知ラレテ居ル。此処デハ空間 (L) ガ否定デアルコトカラ空間 (C), (c), (M), (m), $(C^{(p)})$ $p \geq 1$, (C_0) ニ於テモ上記ノ問題ガ否定ナルコトヲ示サントス。

$\boxed{1}$ 自然數 m ニ對シ、各 interval $\frac{i-1}{m} \leq t < \frac{i}{m}$ $i = 1, 2, \ldots\ldots, m-1$, 及ビ $\frac{m-1}{m} \leq t \leq 1$ ニ於テ constant デ、有理數ヲソノ値ニ持ツヤウナ閉区間 $0 \leq t \leq 1$ デ定義サレタ step-function ノ凡テノ集合ヲ考ヘル。コノ集合ノ任意ノニツノ element $x(t)$, $y(t)$ ノ一對ニ對シ、實數

$$(1) \quad dis(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$$

ヲ對應サセテ metric space トスル。更ニコノ metric ニ依ッテコノ空間ヲ Komplettierung シテ得ラレル空間ヲ (C^*) ヲ以ッテ表ハス。ソウスルト (C^*) ノ element

---

1) S. Banach; Théorie des opérations linéaires. Warszaw. 1932. P. 244—245 特ニ問題 (7) ヲ參照。吾々ハ之ヲ今後單ニ B: Théorie; ト表ハスコトニスル。

ハ區間 $0 \leq t \leq 1$ デ定義サレタ uniformly convergent ナ step-function ノ極限トシテ表ハサレル。(C^*) ハ明ラカニ metric, linear ナ空間デアル。又上ノ樣ナ step-function ノ數ハ可附番個デ、(C^*) ハソレヲ Komplettierung シタ空間デアルカラ separable 且ツ complete デアル。更ニ (I) ハ type (B) ナルタメノ三ツノ條件[1]ヲ充スカラ (C^*) ハ type (B) ノ空間デアル。連續函數ハ step-function ニ依ッテ approximation サレ、(C) ト (C^*) トハ同一ノ metric ヲ持ツ。故ニ (C) ハ (C^*) ニ含マレル。尚ホ序ニ二三ノ定義ヲ附加ヘヨウ。

$\mathfrak{M}$ ヲ空間 (B) ノ中ノ closed linear manifold トスルト、E ガ空間 (B) カラ $\mathfrak{M}$ ヘノ projection ナリトハ、$E(B) = \mathfrak{M}$, $E^2 = E$ デアル樣ナ bounded linear transformation ヲ云フ。

(C_n) ハ n 個ノ實數ノ系列 $\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}$ ヲソノ element トシ、ソノ norm ガ

$$\| \{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\} \| = \max_{i=1,2,\cdots n} |a_i|$$

デ定義サレタ空間ヲ表ハス。但シ $(C_\infty) = (C)$ トスル。

$(B) \cong (B')$ ハ空間 (B) ト空間 (B') トガ isometrically ニ isomorphie ナルコトヲ表ハス。

---

1) B: Théorie; P. 53 參照

F. J. Murray[1] ノ Lemma 1.1 ニ依ッテ吾々ノ問題ハ次ノ如クナル；

Λ ヲ以ッテ (C), (c), (M), (m), $(C^{(p)})$ $p \geq 1$, (C_0) ノ中ノ一ツヲ表ハシ、$\mathfrak{M}$ ヲ空間 Λ ノ任意ノ closed linear manifold トスルト、空間 Λ カラ $\mathfrak{M}$ ヘノ projection ガ存在スルカ？

最初コノ問題ガ (C^*) ニ於テ否定サレルナラバ、(C) ニ於テモ否定サレルコトヲ示サウ。ソノタメニ先ヅ二三ノ Lemma ノ証明カラ始メル。

$\boxed{2}$ 定義 1. $(C_{m_1}) \times (C_{m_2}) \times \cdots\cdots \times (C_{m_n})$ ハ n, m_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots n)$ ガ finite, infinite ノ場合ヲ考ヘ；(i) $n = 1, 2, \cdots\cdots$, $m_i = 1, 2, \cdots\cdots$ ノトキハ、$f_i \in (C_{m_i})$ トスルト element ガ $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ デアルヤウナ順序ツケラレタ系列ノ空間ヲ表ハシ、ソノ norm ヲ $\|\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\}\| = \max\limits_{i=1,2,\cdots n} \|f_i\|$ ト定義スル。

(ii) $n = 1, 2, \cdots\cdots$, $m_i = \infty$ (或ハ i = 数レ) ノトキハ $f_i \in (C_{m_i})$, $f_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{im_i}\}$ トスルト、f_i ノ凡テノ element $\{a_{ij}\}$ $i = 1, 2, \cdots\cdots n$, $j = 1, 2, \cdots\cdots$ ヲ對角線ノ方法ニ依ッテ一列ニ並ベ即チ形式的ニハ

---

1) F. J. Murray; Relations between certain problems of Banach. Studia Math. T. VI, 1936, P. 199 吾々ハ之ヲ今後 M: Relations; ノ如ク表ハス.

$\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, \cdots\cdots, a_{1i} \cdots\cdots a_{l,i-l+1} \cdots a_{i1} \cdots\cdots\}$ トシ、コレガ converge スル様ナ順序付ケラレタ系列 $\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\}$ ヲソノ element トシ、ソノ norm ガ $\|\{f_1 f_2 \cdots\cdots f_n\}\| = \max\limits_{i=1,2,\cdots n} \|f_i\|$ デ定義サレタ空間ヲ表ハス。

(iii) $n = \infty$, $m_i = 1, 2, \cdots\cdots \infty$ ノトキ $(C_{m_1}) \times (C_{m_2}) \times \cdots\cdots$ ハ (ii) ト同様ニ $f_i \in (C_{m_i})$ トシ、f_i ノ凡テノ element $\{a_{ij}\}$ $i = 1, 2, \cdots\cdots$, $j = 1, 2, \cdots\cdots$ ヲ對角線ノ方法ニヨツテ一列ニ並べ、ソレガ converge スル様ナ順序付ケラレタ系列 $\{f_1, f_2, \cdots\cdots\}$ ヲ element トシ、ソノ norm ガ $\|\{f_1 f_2 \cdots\cdots\}\| = \underset{i=1,2,\cdots\cdots}{l.u.b.} \|f_i\|$ デ定義サレタ空間ヲ表ハス。

$(C_1^*) \times (C_2^*) \times \cdots\cdots \times (C_n^*)$ $n = 1, 2, \cdots\cdots$, $(C_i^*) = (C^*)$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots n)$; ハ $f_i \in (C_i^*)$ トスルト element ガ $\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\}$ デ、ソノ norm ガ $\|\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\}\| = \max\limits_{i=1,2,\cdots n} \|f_i\|$ デ定義サレタ順序付ケラレタ系列ノ空間ヲ表ハス。

$(C_1^*) \times (C_2^*) \times \cdots\cdots$, $(C_i^*) = (C^*)$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$; ハ $f_i \in (C_i^*)$ トスルト、或ル constant ニ uniformly ニ converge スル系列 $\{f_1, f_2, \cdots\cdots\}$ ヲ element トシ、norm ガ $\|\{f_1, f_2, \cdots\cdots\}\| = \underset{i=1,2,\cdots}{l.u.b.} \|f_i\|$ デ定義サレタ順序付ケラレタ系列ノ空間ヲ表ハス。

$\boxed{\text{Lemma 1}}$ (a) $(C_{m_1}) \times (C_{m_2}) \times \cdots\cdots \times (C_{m_n}) \simeq (C_m)$, $n = 1, 2, \cdots\cdots \infty$, $m_n = 1, 2, \cdots\cdots \infty$, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = m$.

($n=\infty$ ナラバ (C_{m_n}) ヲ除ク)

(b) $(C_1^*)\times(C_2^*)\times\cdots\cdots\times(C_n^*)\simeq(C^*)$, $n=1,2,\cdots\cdots\infty$

($n=\infty$ ナラバ (C_n^*) ヲ除リ)

(證明) (a)ニ對シテハ (i) n, $m_i<\infty$ ノトキハ、$(C_{m_1})\times(C_{m_2})\times\cdots\cdots\times(C_{m_n})$ ノ element $\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\}$, $f_i=\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots a_{im_i}\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ ニ對シ (C_m) ノ element $f=\{a_{11}\cdots\cdots a_{1m_1}\cdots\cdots a_{n1}\cdots\cdots a_{nm_n}\}$ ヲ對應サセル。ソウスルト

$$\|\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\}\|=\max_{i=1,2,\cdots\cdots n}\|f_i\|=\max_{i=1,2,\cdots n}\left(\max_{j=1,2,\cdots m_i}|a_{ij}|\right)$$

$$=\max_{i,j}|a_{ij}|=\|f\|$$

コノ對應ハ1對1デ norm ガ變ラナイカラコノ場合(a)ハ成立スル。

(ii) $n<\infty$ $m_i=\infty$(或ルiニ對シ)ノトキハ、$(C_{m_1})\times(C_{m_2})\times\cdots\cdots\times(C_{m_n})$ ノ element $\{f_1 f_2\cdots\cdots f_n\}$, $f_i=\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{im_i}\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots n)$ トスルト、假定ニヨッテ $\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, \cdots\cdots, a_{1i}, \cdots\cdots, a_{i1}, \cdots\cdots\}$ ハ converge スルカラ之レヲ f トオクト、fハ (C_∞) ノ element デアル。依ッテ $\{f_1 f_2\cdots\cdots f_n\}$ ニ對シ (C_∞) ノ element f ヲ對應サセルト

$$\|\{f_1 f_2\cdots\cdots f_n\}\|=\max_{i=1,2,\cdots n}\|f_i\|$$

$$=\max_i\left(\underset{j=1,2,\cdots\cdots}{\mathrm{l.u.b.}}|a_{ij}|\right)=\|f\|$$

コノ對應ハ1對1デ norm ガ變ラナイカラコノ場合ニモ

(a) ハ成立スル。

(iii) $n=\infty$, $m_i=1,2,\cdots\cdots\infty$ ノトキ $(C_{m_1})\times(C_{m_2})\times\cdots$ $\cdots$ ノ element ヲ $\{f_1 f_2\cdots\cdots\}$ トスルト、(ii) ト同様ニ f_i ノ凡ベテノ element ヲ一列ニ並ベタ $\{a_{11}a_{12}a_{21}\cdots\cdots$ $\cdots a_{1i}\cdots\cdots a_{i1}\cdots\cdots\}$ ハ假定ニヨツテ converge スルカラ之レヲ f トオクト、f ハ (C_∞) ノ element デアル。依ツテ $\{f_1, f_2, \cdots\cdots\}$ ニ対シ (C_∞) ノ element f ヲ對應サセルト

$$\|\{f_1,f_2,\cdots\}\| = \underset{i=1,2,\cdots}{l.u.b}\|f_i\| = \underset{i=1,2,\cdots}{l.u.b.}\left(\underset{j=1,2,\cdots}{l.u.b.}|a_{ij}|\right)$$

$$= \underset{i,j}{l.u.b.}|a_{ij}| = \|f\|$$

コノ對應ハ1對1デ且ツ norm ガ変ラナイカラコノ場合モ (a) ハ成立スル。

(b) ノ場合ヲ証明スルタメニ、(C^*) ノ任意ノ element φ ニ対シ、$T(\varphi)=\varphi(t;[0,1])$ [1] ナル transformation ニ依ツテ移サレタ (C^*) ノ像ヲ $(\widehat{C})$ トシ、$(\widehat{C})$ ノ任意ノ element $x(t)$ ニ対シ、ソノ norm ヲ

$\|x\| = \underset{0\leqq t<1}{l.u.b.}|x(t)|$ ト定義スル。ソシスルト $(C^*)\simeq(\widehat{C})$ ナルコトが証明出来ル。ソレニハコノ對應ガ1對1デ norm ガ変ラナイコトヲ云エバヨイ。(C^*) ニ於テ everywhere dense ナ step-function ヲ $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \varphi_n, \cdots\cdots$ トスルト、$\|T(\varphi_n)\|=\|\varphi_n\|$, $\|T(\varphi)\|\leqq\|\varphi\|$ ハ明ラカデ

---

1) $\varphi(t:[0,1])$ ハ $\varphi(t)$ ノ定義領域ヲ $0\leqq t\leqq 1$ カラ $0\leqq t<1$ ニ狭メタモノヲ表ハス。

アル。他方ニ於テ φ ニ uniformly ニ converge スル $\{\varphi_n\}$ ノ部分列ヲ $\{\varphi_{n_\nu}\}$ トスルト

$\varepsilon > 0$ ニ對シ、正整数 $N(\varepsilon)$ ガ決リ、$\nu > N(\varepsilon)$ ニ對シ

$$\big|\|\varphi_{n_\nu}\| - \|\varphi\|\big| \leq \|\varphi_{n_\nu} - \varphi\| < \varepsilon/2,$$

$$\big|\|T(\varphi_{n_\nu})\| - \|T(\varphi)\|\big| \leq \|T(\varphi_{n_\nu}) - T(\varphi)\|$$

$$= \|T(\varphi_{n_\nu} - \varphi)\| \leq \|\varphi_{n_\nu} - \varphi\| < \varepsilon/2$$

ナラシメルコトが出來ル。

$$\therefore \big|\|T(\varphi)\| - \|\varphi\|\big| \leq \big|\|T(\varphi)\| - \|T(\varphi_{n_\nu})\|\big| + \big|\|T(\varphi_{n_\nu})\| - \|\varphi_{n_\nu}\|\big|$$

$$+ \big|\|\varphi_{n_\nu}\| - \|\varphi\|\big| < \varepsilon$$

從ツテ $\|T(\varphi)\| = \|\varphi\|$. 故ニ $(C^*) \simeq (\widetilde{C})$ が証明出來タ。

次ニ $(\widetilde{C}_1) \times (\widetilde{C}_2) \times \cdots\cdots \times (\widetilde{C}_n)$[1] $\simeq (\widetilde{C})$, $n = 1, 2, \cdots\cdots$. ヲ証明シヨウ。先ヅ interval $[0, 1]$ ヲ n 等分シ.

$f_i \in (\widetilde{C}_i)$ ニ対シ、$(\widetilde{C})$ ノ element:

$$\bar{f}_{i(t)} \begin{cases} = f_i(nt - i + 1) & \dfrac{i-1}{n} \leq t < \dfrac{i}{n} \\ = 0 & 0 \leq t < \dfrac{i-1}{n}, \ \dfrac{i}{n} \leq t < 1. \end{cases}$$

ヲ對應サセル. $\bar{f}_i, \bar{f}_j$ $(i \neq j)$ ハソノ値ガ 0 ニナル点以外ハ重ナラナイ。$(\widetilde{C})$ ハ linear デアルカラ $\bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \cdots\cdots$ $\cdots + \bar{f}_n$ ハ $(\widetilde{C})$ ノ element デアル。依ツテ $\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\}$ ニ對シ $(\widetilde{C})$ ノ element $\bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \cdots\cdots + \bar{f}_n$ ヲ

---

1) $(\widetilde{C}_1) \times (\widetilde{C}_2) \times \cdots\cdots \times (\widetilde{C}_n)$ ハ $(C_1^*) \times (C_2^*) \times \cdots\cdots \times (C_n^*)$ ト同様ノ意味ヲ持ツモノトス。

對應サセル。ソシスルト

$$\|\{f_1, f_2, \cdots\cdots f_n\}\| = \max_{i=1,2,\cdots n}\|f_i\| = \|\bar{f}_1+\bar{f}_2+\cdots\cdots+\bar{f}_n\|$$

コノ對應ハ1對1デ norm ガ変ラナイカラ n ガ finite ノ場合ハ成立スル。

$n=\infty$ ノトキハ、$f_i \leftarrow (\widetilde{C}_i)$ ニ對シ $(\widetilde{C})$ ノ element:

$$\bar{f}_i(t)\begin{cases} = f_i[(i+1)(it-i+1)] & \dfrac{i-1}{i} \leqq t < \dfrac{i}{i+1} \\ = 0 & 0 \leqq t < \dfrac{i-1}{i},\ \dfrac{i}{i+1} \leqq t < 1 \end{cases}$$

ヲ對應サセル。假定ニヨッテ $(\widetilde{C}_1)\times(\widetilde{C}_2)\times\cdots\cdots$ ノ element $\{f_1, f_2, \cdots\cdots\}$ ハ或ル constant ニ uniformly ニ converge スルカラ、$\bar{f}_1+\bar{f}_2+\cdots\cdots$ ハ $(\widetilde{C})$ ノ element デアル。

依ッテ $\{f_1, f_2, \cdots\cdots\}$ ニ對シ、$(\widetilde{C})$ ノ element $\bar{f}_1+f_2+\cdots\cdots$ ヲ對應サセルト

$$\|\{f_1, f_2, \cdots\cdots\}\| = \underset{i=1,2,\cdots}{l.u.b.}\|f_i\| = \underset{i=1,2,\cdots}{l.u.b.}\|\bar{f}_i\|$$

$$= \|\bar{f}_1 + f_2 + \cdots\cdots\|$$

即チコノ對應ハ1對1デ norm ガ変ラナイカラ

$$(\widetilde{C}_1)\times(\widetilde{C}_2)\times\cdots\cdots \simeq (\widetilde{C})$$

デアル。

既ニ証明シタ様ニ $(C^*) \simeq (\widetilde{C})$ デアルカラ、$f_i \leftarrow (C^*)$ ニ對シ $(\widetilde{C})$ ノ element $T(f_i)$ ヲ對應サセ、$(C_1^*)\times(C_2^*)\times\cdots\cdots\times(C_n^*)$ ノ element $\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\}$ ニ對シ

$(\tilde{C}_1)\times(\tilde{C}_2)\times\cdots\cdots\times(\tilde{C}_n)$ ノ element $\{T(f_1), T(f_2), \cdots\cdots; T(f_n)\}$ ヲ對應サセル。コノ對應ハ1對1デ norm ガ変ラナイ。

$$\therefore\ (C_1^*)\times(C_2^*)\times\cdots\cdots\times(C_n^*)\simeq(\tilde{C}_1)\times(\tilde{C}_2)\times\cdots\cdots\times(\tilde{C}_n)\simeq(\tilde{C})\simeq(C^*).$$ (証明終)

定義2. $\mathfrak{M}$ ヲ空間 (B) ノ closed linear manifold トスルト $C(\mathfrak{M})$, $\overline{C}(B)$ ハ次ノコトヲ表ハス:

$$C(\mathfrak{M})\begin{cases}=\infty & \text{空間}(B)\text{カラ}\ \mathfrak{M}\ \text{ヘノ projection ガ存在シナイトキ}\\ =\text{gr. l. b.}(\|E\|;\ E^2=E,\ E(B)=\mathfrak{M}) & \end{cases}$$

$$\overline{C}(B)=\text{l.u.b.}(C(\mathfrak{M});\ \mathfrak{M}\subset(B)\ \mathfrak{M}\text{ハ closed linear manifold}).$$

然ルニ M: Relations; ノ Lemma 2.1—2.3, 3.2—3.4 ハ如何ナル type (B) ノ空間ニ於テモ成立スルモノデアッテ、勿論 (C^*), (C) ニ於テモ成立スル。依ッテ次ノ定理ヲ得:

$\boxed{\text{定理 I}}$ $\overline{C}(C^*)=C(\mathfrak{M})$, $\overline{C}(c)=C(\mathfrak{N})$ ナルヤウナ closed linear manifold $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ガ夫々 (C^*), (c) ノ中ニ存在シ, 且ツ

$$1=\overline{C}(c_1)\leqq\overline{C}(c_2)\leqq\cdots\cdots\leqq\overline{C}(c_\infty)=\overline{C}(c)$$

ナリ。

$\boxed{3}$ 定義3. 空間 (B) ガ n-dimensional $n\leqq m$ トスルト、吾々ハ $\overline{C}_n(B)$ ヲ以ッテ

$$\bar{C}_n(B) = l.u.b.(c(\mathfrak{M});\ \mathfrak{M} < (B),\ \mathfrak{M}\text{ハ } n\text{-dim. closed lin. manif.})$$

ヲ表ハス。

$\boxed{\text{Lemma 2}}$ $\bar{C}_n(C^*) \leq l.u.b.(\bar{C}_n(c_m);\ m < \infty)$.

(証明) $k_n = l.u.b.(\bar{C}_n(c_m);\ m < \infty)$ トオク。

$k_n = \infty$ ノトキハ明ラカニ成立スルカラ、$k_n < \infty$ ノ場合ヲ証明スレバヨイ.

ε ハ $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} k_n < 1$, $0 < \varepsilon < 1$ ヲ同時ニ充ス実数トス。

$\mathfrak{M}$ ヲ (C^*) ニ含マレル任意ノ n-dimensional closed linear manifold トシ、$f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ中ノ n 個ノ linearly independent ナ element トス。若シ $\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\| = 1$ ナラバ.

M: Relations; ノ Lemma 4.2, 4.3 ニヨツテ正ノ整数 m ト interval $\left[\frac{p-1}{m}, \frac{p}{m}\right]$ $(p = 1, 2, \cdots\cdots m-1)$

及ビ $\left[\frac{m-1}{m}, 1\right]$ デ constant デ, 且ツ

$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (f_i - h_i) \right\| \leq \varepsilon$ ナルヤウナ linearly independent ナ step-function $h_1, h_2, \cdots\cdots, h_n$ トガ存在スル。$\mathfrak{M}_0$ ヲ $h_1, h_2, \cdots\cdots, h_n$ ニ依ツテ張ラレル closed linear manifold トス。又

$$
y_i(t)\begin{cases} =1 & \dfrac{i-1}{m} \leqq t < \dfrac{i}{m} \\ & \text{但シ } i=m \text{ ノトキハ } \dfrac{m-1}{m} \leqq t \leqq 1 \\ =0 & 0 \leqq t < \dfrac{i-1}{m},\ \dfrac{i}{m} \leqq t \leqq 1 \end{cases}
$$

トスルト、$y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ ハ linearly independent デ、$\{y_i\}$ ニ依ッテ張ラレル closed linear manifold ヲ $\mathfrak{N}$ トスル。ソウスルト $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{N} \subset (C^*)$, $\mathfrak{N} \simeq (C_m)$, $\mathfrak{M}_0 \simeq (c_m)$ ナル関係ガアルカラ $\eta > 0$ ニ対シ

$$
|E_0| \leqq \bar{C}_n(c_m) + \eta \leqq k_n + \eta
$$

ナルヤウナ $\mathfrak{N}$ カラ $\mathfrak{M}_0$ ヘノ projection E_0 ガ存在スル。

$f \leftarrow (C^*)$ ニ対シ transformation F ヲ

$$
Ff = \sum_{i=1}^{m} m \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} f(s)\, ds \cdot y_i(t)
$$

ト定義スル。明ラカニ $Ff \in \mathfrak{N}$ デ、若シ $f \in \mathfrak{N}$ ナラバ、

$$
f = \sum_{j=1}^{m} \xi_j y_j(t) \quad (\text{茲ニ } \xi_j \text{ ハ実数}) \text{ デ表ハサレルカラ}
$$

$$
\begin{aligned}
Ff &= \sum_{i=1}^{m} m \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j y_j(s) \right) ds \cdot y_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^{m} m \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} \xi_i\, ds\, y_i(t) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i y_i(t) = f
\end{aligned}
$$

故ニ $F^2=F$ ヲ得ル。又

$$\|Ff\|=\max_{0\leq t\leq 1}\left|\sum_{i=1}^{m} m\int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} f(s)ds\cdot y_i(t)\right|$$

$$\leq \max_{i=1,2,\cdots m}\left(m\int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}}|f(s)|ds\right)=\|f\|$$

コノコトカラ $\|F\|\leq 1$ ガ出ル。他方ニ於テ $f\equiv 1$ トオクト、$\|Ff\|=1=\|f\|$、或ハ $\|f\|=\|Ff\|\leq\|F\|\cdot\|f\|$、故ニ $\|F\|\geq 1$. 従ッテ $\|F\|=1$ デアル。

以上ノコトカラ F ハ (C^*) カラ $\mathfrak{N}$ ヘノ $\|F\|=1$ ナル様ナ *projection* デアルコトガ解ッタ。

次ニ E_0F ヲ考ヘル。コノ *range* ハ $\mathfrak{M}_0$ デアル即チ:

$$E_0F(C^*)=E_0\mathfrak{N}=\mathfrak{M}_0.$$

若シ $f\in\mathfrak{M}_0$ ナラバ $E_0Ff=E_0f=f$. 従ッテ $(E_0F)^2=E_0F$. 依ッテ E_0F ハ (C^*) カラ $\mathfrak{M}_0$ ヘノ *projection* デアル。

$$\therefore\quad C(\mathfrak{M}_0)\leq|E_0F|\leq|E_0|\cdot|F|=|E_0|\leq k_n+\eta$$

η ハ任意ノ実数デアルカラ、$C(\mathfrak{M}_0)\leq k_n<\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.
依ッテ $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot C(\mathfrak{M}_0)<1$ ヲ得ル。

M: Relations; ノ *Lemma 5.1* ニ依ッテ

$$C(\mathfrak{M})\leq C(\mathfrak{M}_0)\frac{1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}C(\mathfrak{M}_0)}{1-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}C(\mathfrak{M}_0)}\leq\frac{k_n(1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}k_n)}{1-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}k_n}.$$

ε ハ任意ノ実数デアルカラ、$C(\mathfrak{M})\leq k_n$. 然ルニ $\mathfrak{M}$ ハ

(C^*) ノ任意ノ n-dimensional closed linear manifold デアルカラ $\overline{C}_n(C^*) \leqq k_n$ デアル。

（証明終リ）

Lemma 2 ガ成立スレバ M: Relations; ノ Lemma 7.1 ハ (L_p), (l_p) ノ代リニ (C^*), (c) ヲ置キ換ヘテモ成立スルカラ即チ：

$$\overline{C}(C^*) \leqq l.u.b.(\overline{C}(c_m),\ n<\infty).$$

之レト定理 I トニ依ッテ次ノ定理ヲ得：

$\boxed{\text{定理 II}}$ $\overline{C}(C^*) \leqq \overline{C}(c)$.

$\boxed{4}$ 今迄述ベタコトカラ (C^*) ニ於テ吾々ノ問題ガ否定デアルナラバ、定理 II ニヨッテ $\infty = \overline{C}(C^*) \leqq \overline{C}(c)$ 即チ $\overline{C}(c) = \infty$ トナル。定理 I ニ依ッテ $\overline{C}(c) = C(\mathfrak{N}) = \infty$ ナルヤウナ closed linear manifold $\mathfrak{N}$ ガ (c) ノ中ニ存在スル。コノコトハ (c) カラソノ中ノ任意ノ closed linear manifold $\mathfrak{N}$ ヘノ projection ガ存在シナイコトヲ示ス。即チ (c) ニ於テ吾々ノ問題ハ否定デアル。

他方ニ於テ吾々ノ問題ハ (c) 及ビ (C^*) ニ於テ否定デアルコトガ証明出来ル。

何トナレバ空間 (L) ハ空間 (C) ノ或ル部分空間ト isometrically ニ isomorphic[1] デアルカラ、空間 $(\mathfrak{L})$ ヲ (C) ニ含マレ且ツ $(\mathfrak{L}) \simeq (L)$ ナルヤウナ closed

---

1) B: Théorie; p. 187. th. 10 参照.

linear manifold トセヨ。吾々ノ問題ハ (L) ニ於テ否定デアレカラ、($\mathfrak{L}$) ニ於テモ否定デアル。若シ (C) ニ於テ肯定デアルナラバ、$\mathfrak{M}$ ヲ ($\mathfrak{L}$) ノ中ノ closed linear manifold トシタトキニ、closed linear manifold $\mathfrak{N}$ ガ (C) ノ中ニ存在シテ、(C) ノ中ノ任意ノ element f ニ對シ、uniquely ニ $f = g + h$, $g \in \mathfrak{M}$, $h \in \mathfrak{N}$ トナル。

特ニ $f \in (\mathfrak{L})$ トスルト $g \in (\mathfrak{L}) \cdot \mathfrak{M}$, $h \in (\mathfrak{L}) \cdot \mathfrak{N}$ トナル。シカルニ ($\mathfrak{L}$), $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ハ closed linear manifold デアルカラ ($\mathfrak{L}$)$\cdot\mathfrak{M}$, ($\mathfrak{L}$)$\cdot\mathfrak{N}$ モ亦 closed linear manifold デアル。コレハ假定ニ反ス。即チ (C) ニ於テ吾々ノ問題ハ否定デアル。全ク同様ニシテ (C^*) ニ於テモ否定デアルコトガ證明出來ル。從ツテ (c) ニ於テモ否定デアル。

(M), (m) ニ於テ問題ガ否定ナルコト。

空間 (C) ハ空間 (M) ノ部分空間デ同一ノ metric ヲ有スルカラ、(C) ニ於テ否定ナラバ空間 (M) ニ於テモ否定ナルコトハ明ラカデアル。全ク同様ノ理由デ空間 (m) ニ於テモ否定デアル。

($C^{(p)}$) $p \geq 1$, (C_0) ニ於テ問題ガ否定ナルコト。

($C^{(p)}$) $p \geq 1$ ト (C), (C_0) ト (c) トハ夫々 isomorphic デアル。依ツテ更ヲ ($C^{(p)}$) $p \geq 1$ ヲ完全ニ (C) ニ移ス 1對1, linear ナ operator トスル。若シ ($C^{(p)}$) $p \geq 1$ デ肯定デアルナラバ、($C^{(p)}$) $p \geq 1$ ノ中ノ任意ノ closed linear manifold $\mathfrak{M}$ = 對シ、closed linear manifold $\mathfrak{N}$ ガ $(C^{(p)})\ p\geqq 1$ ノ中ニ存在シテ、$(C^{(p)})\ p\geqq 1$ ノ任意ノ element f ハ uniquely = $f=g+h$, $g\in\mathfrak{M}$, $h\in\mathfrak{N}$ トナル。$\Phi(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}^*$, $\Phi(\mathfrak{N})=\mathfrak{N}^*$, $\Phi(f)=f^*$, $\Phi(g)=g^*$, $\Phi(h)=h^*$ トスルト、$\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{N}^*$ ハ共ニ closed linear manifold デ、$f^*\in(C)$ デアツテ uniquely = $f^*=g^*+h^*$, $g^*\in\mathfrak{M}^*$, $h^*\in\mathfrak{N}^*$ トナル。之レハ矛盾デアル。從ツテ $(C^{(p)})\ p\geqq 1$ ニ於テ吾々ノ問題ハ否定デアル。

全ク同様ノ論法ニ依ツテ (c_0) ニ於テモ否定デアルコトガ云ヒ得ル。