800. 群ト群芽

河田　敬義（東大）

van der Waerden: "Vorlesungen über kontinuierliche Gruppe" デ與ヘラレタ抽象群芽ヲ連續群ニマデ拡大スルトイフ問題ガアリマス。其ノ問題ヲメグッテ、特別ノ場合ニ解決ヲ與ヘタイト思ヒマス。

1

叮寧ニ定義カラ初メマスト連續群（topologische Gruppe）ノハ略ストシテ

〔定義 1〕「群芽（Gruppenkeim）$\mathfrak{K}$トハ一ツノ Hausdorff 空間デ，ソノ元 $a, b, c, \cdots\cdots$，ノアルモノノ間ニ積ガ定義サレテ

(i) $a\cdot b$, $b\cdot c$ 及ビ $(a\cdot b)\cdot c$ 又ハ $a\cdot(b\cdot c)$ ノ一方ガ意味ヲ持テバ，他方モ意味ヲモチ $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ トナル．

(ii) スベテノ $a\in\mathfrak{K}$ ニ對シテ $a\cdot e=e\cdot a=a$ トナル單位元 e ガアル。

(iii) e ノアル近傍 $\mathfrak{U}_1(e)$ デハ二ツノ元ノ間ニ常ニ積ガ定義サレル。

(iv) e ノアル近傍 $\mathfrak{U}_2(e)$ デハ $a^{-1}\cdot a=a\cdot a^{-1}=e$ トナル a^{-1} ガスベテノ $a\in\mathfrak{U}_2(e)$ ニ對シテ存在スル。

(v) $a\cdot b$, a^{-1} ハソノ変数ノ連続函数デアル。

〔定義2〕 群芽 $\mathfrak{K}$ ト連続群 $\mathfrak{G}$ トガ im Kleinen-stetig isomorph トハ，$\mathfrak{K}$ 及ビ $\mathfrak{G}$ ノ単位元ノ近傍 $U(e)$ ト $U'(e')$ トヲ適当ニ擇ブト $a\longleftrightarrow a'$ ナル一對一ノ ($a\in U(e)$, $a'\in U'(e')$) ノ對應デ homöomorph トナリ

(i) $a, b, c\in U(e)$, $a\cdot b=c$ ナラバ $a'\cdot b'=c'$

(ii) $a', b', c'\in U'(e)$, $a'\cdot b'=c$ ナラバ $a\cdot b=c$

ヲ満足スルコトヲイフ。特ニ $U(e)$ ヲ指定スルトキハ $U(e)$- im Kleinen stetig isomorph トイフ。

群芽ガ群ニマデ無條件ニ拡大出来ナイコトハ Topologie ノナイ triviel ナ例： $\mathfrak{K}=\{e, a, b, c, d\}$ デ e トノ積以外ハ $a\cdot b=a\cdot c=d$ 丈ガ定義サレテヰル場合ヲ考ヘレバワカリマス。

又拡大スルトイフコトモ，モトモト群芽ハ連続群ノ単位元ノ近傍トシテ考ヘラレタノデスカラ先ヅ次ノヤウニ考ヘラレルト思ヒマス。

［問題1］「$\mathfrak{K}$ ト $\mathfrak{K}$- im Kleinen stetig isomorph ナ連続群 $\mathfrak{G}$ ヲ求メルコト」

［問題2］「$\mathfrak{K}$ ト im Kleinen stetig isomorph ナ連続群 $\mathfrak{G}$ ヲモトメルコト」

故ニ問題1デハ $\mathfrak{K}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ニマデ拡大スルトキ，$\mathfrak{K}$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ中デ e ノ近傍トナルコトヲ要求スルノデスカラ直線ノ移動群ニマデ開線分ノナス群芽ヲ拡大スルトイフコトハ除外スルコ

トニナリマス。

代數的ニモ、群ノ時ニハ定義1ノ(i)カラ $a\cdot b\cdots\cdots l$ ナル積ハソノ結合スル順序ニハ無關係ニ定ツタノデスガ群芽ノ時ニハ

(i') (強イ結合律)「$\mathfrak{K}\ni a, b, \cdots\cdots, l$ カラ $ab\cdots\cdots l$ ナル積ヲ次々ニ $\mathfrak{K}$ ノ中デ作ルトキニハ、一ツノ結合ノ順序デハ $x\in\mathfrak{K}$ トナリ、他ノ順序デハ yz ノ形ニナルトスレバ $(y, z\in\mathfrak{K})$ $x=y\cdot z$ トナル。」

ガ(i)丈カラ出ナイト思ヒマス。

又 Topologie ノ方ヲ考ヘテモ、$\mathfrak{K}$ トシテ直線ノ移動群ト e ト以外ニハ全ク積ノ定義サレテヰナイ平面トヲ考ヘルトキハ問題ハ解ケマセン。ソレハ若シ $\mathfrak{G}$ ニマデ拡大サレレバ homogen ニナラナケレバナラナイコトカラワカリマス。

之等ノコトガナケレバ特別ノ場合ニ問題1ガトケマス。ソノタメニ

〔定義3〕「群芽 $\mathfrak{K}$ ニテスベテノ $\mathfrak{K}\ni a$ ニ逆元ガ存在スルトキニ對稱群芽トイフ」コトニシマスト

〔定理1〕「對稱群芽 $\mathfrak{K}$ ニツイテ問題1ニ對スル必要充分ナル條件ハ

(イ) 強イ結合律(i')ガ $\mathfrak{K}$ デ成立スルコト.

(ロ) $a\cdot b$ ガ $\mathfrak{K}$ デ定義サレルナラバ a, b ノ適當ナ近傍 $U(a), U(b)$ ヲトレバ, $a'\in U(a)$, $b'\in U(b)$ ニ對シテ $a'\cdot b'$ ガ定義サレル.

事デアル」

又問題2ニ對シテハ，モット一般ニ

〔定理2〕「群芽 $\mathfrak{G}$ ニツイテ問題2ニ對スル必要充分ナル條件ハ e ノ充分小ナル近傍 $U(e)$ ヲトレバ $U(e)$ 内デノ積ノミヲ考ヘル時ニ強イ結合律（i'）ノ成立スルコトデアル」

ガ成立シマス。

對稱群芽デ（i'）ノ成立シナイ例：又 Lie 群芽ノトキニ定理2ノ條件ガ成立スルカ否カ；又定理2ノ條件ノナリタタヌ $\mathfrak{G}$ ノ例トイツタ樣ノモノモヨクワカリマセン。

又，問題1デ對稱群芽デナイ時ハ先ヅソレヲ對稱群芽ニマデ拡大スルコトヲ考ヘレバ，必要ナ丈條件ヲ列ベレバ何トカ言ヘルワケデスガ，ウマクマトマリガツキマセン。之レ等ニツイテ皆樣ノ御教示ノ程才願ヒイタシマス。

2

定理2ハ定理1カラスグニワカリマス。先ヅ條件ノ必要ナコトハ明デスガ、逆ニカヽル $U(e)$ ガアルトスレバ定義1ノ $U_1(e)$, $U_2(e)$ ト合セテ $V(e)=U_1(e)\frown U_2(e)\frown U(e)$ トシ，$\mathfrak{G}_0=V(e)\frown V(e)^{-1}$ トオケバ，積ノ連續性カラ定理1ノ條件ヲ滿足シマス。∴ $\mathfrak{G}$ ト定理1ニヨリ作ツタ $\mathfrak{g}$ トハ $\mathfrak{G}_0$-im Kleinen isomorph ニナリマス。

定理1ノ証明

(1) $\mathfrak{g}$ ノ代數的定義. $\mathfrak{G}$ ノスベテノ元 $a, b, c,$ -----ニ對シテ $A, B, C,$ -----ナル文字ノ集リヲ $\mathfrak{M}$ トシ，$\mathfrak{M}$ ヲ

Erzeugende トスル *freie gruppe* $\widetilde{\mathfrak{G}}$ ヲ作ル。

次ニ $\mathfrak{K}$ ヨリ $a, b, c,\ a\cdot b = c$ ナルスベテノ a, b, c ノ組ヲトツテ

$$R = ABC^{-1}$$

ナル *Relationssystem* $\mathfrak{R}$ ヲ作ル．（以下 $\mathfrak{K}$ ト $\mathfrak{M}$ トノ對應ヲ $a \longleftrightarrow A$ …… ノ如ク與ヘルモノトスル）．$\mathfrak{R}$ デ *erzeugen* サレル $\widetilde{\mathfrak{G}}$, *normalteiler* ヲ $\mathfrak{N}$ トシテ $\mathfrak{G} = \widetilde{\mathfrak{G}}/\mathfrak{N}$ ヲ作ル。$\widetilde{\mathfrak{G}}$ ノ元 $A^{\pm 1}B^{\pm 1}\cdots\cdots L^{\pm 1}$ ヲ含ム $\mathfrak{G}$ ノ *Klasse* ヲ $\overline{A^{\pm 1}B^{\pm 1}\cdots\cdots L^{\pm 1}}$ トカクコトニスル。

Lemma 1. 「$\mathfrak{K}$ デ $a\cdot b = c$ ナラ $\mathfrak{G}$ デ $\overline{AB} = \overline{C}$ トナル．一般ニ $\mathfrak{K}$ ノ中デアル順序デ結合シテ $a\cdot b\cdots\cdots l = m$ ナラバ $\mathfrak{G}$ デ $\overline{AB\cdots\cdots L} = \overline{M}$ トナル。

逆ニ $A, B, C \in \mathfrak{M}$ デ $\mathfrak{G}$ デ $\overline{AB} = \overline{C}$ ナラバ $\mathfrak{K}_0$ デ $a\cdot b = c$ トナル。

特ニ $\overline{A} = \overline{B}$ ナラ $a = b$ トナル。」

（証）前半ハ $\mathfrak{N}$ ノ定義カラ明ラクデアル．後半ハ $\overline{AB} = \overline{C}$ ナラバ $\mathfrak{G} = \widetilde{\mathfrak{G}}/\mathfrak{N}$ カラ $\widetilde{\mathfrak{G}}$ デ $AB = CN,\ N \in \widetilde{\mathfrak{G}}$. N ハ

$$\prod_{i=1}^{r} D_1^{(i)}\cdots\cdots D_{i_n}^{(i)} R_i^{\pm 1} D_{i_n}^{(i)-1}\cdots\cdots D_1^{(i)-1}\ ;\ R_i \in \mathfrak{R},\ D_i^{(j)} \in \mathfrak{M}$$

トカケル．$\widetilde{\mathfrak{G}}$ ニ於ケル相等ノ定義カラ $AB = CN$ トハアル文字ノ列 $F_1^{\pm 1}\cdots\cdots F_N^{\pm 1}$ カラ $W\cdot W^{-1}$, $W^{-1}W$ ノ形ノ文字ヲ順序ニ消去シテ AB 及ビ CN ニ変形サレルコトデアル。今 $\mathfrak{K}$ ノ

元ノ列

$$(1)\quad f_1^{\pm 1}\cdots\cdots f_n^{\pm 1}; \qquad (2)\quad a, b;$$

$$(3)\quad c\prod_{i=1}^{r} d_1^{(i)}\cdots\cdots d_{i_n}^{(i)}(a_i b_i c_i^{-1})^{\pm 1} d_{i_n}^{(i)^{-1}}\cdots\cdots d_1^{(i)^{-1}}$$

ヲ考ヘルト、上カラ(1)デ $w\cdot w^{-1}$, $w^{-1}\cdot w$ ヲ e デオキカヘテ (1) ハ (2) 及ビ (3) ニナホスコトガ出来ル。更ニ (3) ニ於テ $a_i\cdot b_i = c_i$ トオキ, $a_i b_i c_i^{-1} = e$ デオキカヘ, 次ニ $d_{i_n}^{(i)} e\, d_{i_n}^{(i)^{-1}} = e, \cdots\cdots,\ d_1^{(i)} e\, d_i^{(i)^{-1}} = e$, ト順序ニ (3) ノ $\prod$ ノ各項ヲ $\mathfrak{K}$ 内デ積ヲ作ッテ e ニシテ行ケバ (3) ハ c トナル。即チ (1) ナル $\mathfrak{K}$ ノ元ノ列ヲ $\mathfrak{K}$ 内デ積ヲ次々ニ作ルコトニヨリ

ab 及ビ c トナッタ。故ニ假定(イ)カラ $a\cdot b = c$ トナル。――

(ロ) $\mathfrak{G}$ ノ Topologisierung. $\mathfrak{G}$ ノ元 $\bar{A}$, $A\in\mathfrak{G}$ カラ代表ヲ $A_1\cdots\cdots A_r$ $(A_i\in\mathfrak{M})$ ノ形ニトルコトガ出来ル。$\mathfrak{K}$ ノ中デ $a_1, \cdots\cdots, a_r$ ノ近傍 $\mathfrak{U}_1(a_1), \cdots\cdots, \mathfrak{U}_r(a_r)$ ヲトリ $a_i'\in\mathfrak{U}_i(a_i)$ カラ $A_1'\cdots\cdots A_r'$ ノ全体ヲ $\bar{A}$ ノ近傍トスル。之レヲ記号デ

$$(4)\quad \overline{\mathfrak{U}}(\bar{A}) = \overline{U_1(A_1)\cdots\cdots U_r(A_r)}$$

ト書クコトニスル。

Lemma 2. 「$\bar{A}$ ノ任意ノ一ツノ代表 $A_1\cdots\cdots\cdots A_r$ $(A_i\in\mathfrak{M})$ ニ對シテ $\mathfrak{U}_1(a_1), \cdots\cdots \mathfrak{U}_r(a_n)$ ヲ充分ニ小サクトレバ、如何ナル $\bar{A}$ ノ近傍 $\overline{\mathfrak{U}}'(\bar{A})$ ヲトルモ

$$\overline{\mathfrak{U}}(\bar{A}) \subset \overline{\mathfrak{U}}'(\bar{A})$$

ナラシメルコトガ出来ル。」

（証）　$\overline{\mathfrak{U}'(\bar{A})} = \overline{U_1'(B_1)\cdots\cdots U_s'(B_s)}$，$\bar{A} = \overline{B_1\cdots\cdots B_s}$，

$B_i \in \mathfrak{M}$ トスルト、$\mathfrak{u}_i(a_i) = a_i \cdot \mathfrak{u}_i(e)$ トオケバ

$\mathfrak{u}_1'(b_1) = \mathfrak{u}_1'(e)\cdot b_1$ ＝対シテ積ノ連続性ト仮定（ロ）

カラ

$$a_1\,\mathfrak{u}_1(e)\,a_1^{-1}\cdot a_1 a_2\,\mathfrak{u}_2(e)\,a_2^{-1}a_1^{-1}\cdots\cdots a_1\cdots\cdots$$
$$\cdots a_r\,\mathfrak{u}_r(e)\,a_r^{-1}\cdots\cdots a_1^{-1} \subset \mathfrak{u}_1'(e)$$

ナラシメル様＝ e ノ近傍 $\mathfrak{u}_1(e),\cdots\cdots,\mathfrak{u}_r(e)$ ヲトルコトガ

出来ル。其ノ時

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{U}}(\bar{A}) &= \overline{A_1U_1(E)}\cdots\cdots\overline{A_rU_r(E)}\\ &= \overline{A_1U_1(E)A_1^{-1}}\cdot\cdots\cdots\overline{A_1\cdots\cdots A_rU_r(E)A_r^{-1}\cdots A_1^{-1}}\cdot\overline{A_1\cdots A_r}\\ &\subset \overline{U_1'(E)}\ \overline{B_1\cdots\cdots B_s} = \overline{U_1'(B_1)\cdot B_2\cdots\cdots B_s} \subset \overline{\mathfrak{U}}'(\bar{A})\end{aligned}$$

（ハ）　$\mathfrak{O}$ ガ *topologischer Raum* トナルコト。

（i）　$\overline{\mathfrak{U}}(\bar{A}) \ni \bar{A}$

（ii）　$\bar{A}$ ノ二ツノ近傍 $\overline{\mathfrak{U}}(\bar{A}),\ \overline{\mathfrak{U}}'(\bar{A})$ ＝対シテ

$\bar{A} = \overline{A_1\cdots\cdots A_r}$，（$A_i \in \mathfrak{M}$）トシテ

$$\left.\begin{aligned}\overline{\mathfrak{U}}(\bar{A}) &\supset \overline{\mathfrak{U}}_0(\bar{A}) = \overline{U_1(A_1)\cdots\cdots U_r(A_r)},\\ \overline{\mathfrak{U}}'(\bar{A}) &\supset \overline{\mathfrak{U}}_0'(\bar{A}) = \overline{U_1'(A_1)\cdots\cdots U_r'(A_r)}\end{aligned}\right\}\ \text{ナル}\ \overline{\mathfrak{U}}_0,$$

$\overline{\mathfrak{U}}_0'$ ガアル。

コヽデ $\mathfrak{v}(a_i) \subset \mathfrak{u}_i(a_i) \cap \mathfrak{u}_i'(a_i)$ ト近ヲ取

レバ

$$\overline{\mathfrak{V}}(\bar{A}) = \overline{V_1(A_1)\cdots\cdots V_r(A_r)} \subset \overline{\mathfrak{U}}_0(\bar{A}) \cap \overline{\mathfrak{U}}_0'(\bar{A})\ \text{ト}$$

ナル。

（iii）　$\overline{\mathfrak{U}}(\bar{A}) \ni \bar{B}$ ナラバ $\overline{\mathfrak{U}}(\bar{A})$ ハ又 $\bar{B}$ ノ近傍デデ

モアル。

(iv) $\mathfrak{G} \ni \overline{A}, \overline{B}$ ニテ任意ノ $\overline{\mathfrak{U}}(\overline{A})$, $\overline{\mathfrak{U}}'(\overline{B})$ ニ對シテ $\overline{\mathfrak{U}}(\overline{A}) \cap \overline{\mathfrak{U}}'(\overline{B}') \neq 0$ ナラバ $\overline{A}=\overline{B}$ トナル。

$\mathfrak{K}$ デ e ノマハリノ近傍系ヲ $\{\mathfrak{U}(e)\}$ トスル. 其ノ時 $\mathfrak{G}$ デ $\overline{A}$, $\overline{B}$, ノマハリデ

$$\overline{\mathfrak{U}}(\overline{A}) = \overline{A_1 U(E) \cdots\cdots A_r U(E)},\quad \overline{A} = \overline{A_1 \cdots\cdots A_r}\ (A_i \in \mathfrak{M})$$

$$\overline{\mathfrak{U}}(\overline{B}) = \overline{B_1 U(E) \cdots\cdots B_s U(E)},\quad B = \overline{B_1 \cdots\cdots B_s}\ (B_i \in \mathfrak{M})$$

ヲ作リ, $\overline{\mathfrak{U}}(\overline{A}) \cap \overline{\mathfrak{U}}(\overline{B}) \ni \overline{C}$ ヲ取リ $\{\overline{C}\}$ ノ全体ヲ考ヘル。

$$\overline{C} = \overline{C_1 \cdots\cdots C_r} = \overline{D_1 \cdots\cdots D_s},\quad C_i \in A_i U(E),$$

$$D_i \in B_i U(E).$$

ナル故 $\overline{E} = \overline{F_1 \cdots\cdots F_t}$; $F_1 = C_1, \cdots\cdots, F_r = C_r, F_{r+1} = D_s^{-1}, \cdots\cdots, F_{r+s} = D_1^{-1}$ トナル. $(t = r+s)$、且ツ豫メ $\mathfrak{U}(e) = \mathfrak{U}(e)^{-1}$ トシテオケバ

(5) $F_i \in F_i^{\circ} U(E)$

トナル. コヽニ $F_1^{\circ} = A_1, \cdots\cdots, F_r^{\circ} = A_r$, $F_{r+1}^{\circ} = B_s^{-1}, \cdots\cdots, F_{r+s} = B_1^{-1}$ トスル,

目標ハ $\overline{F_1^{\circ} \cdots\cdots F_t^{\circ}} = \overline{E}$ デアル。

今 $\overline{F_t^{\circ -1} \cdots\cdots F_1^{\circ -1} F_1 \cdots\cdots F_t F_1^{\circ} \cdots\cdots F_t^{\circ}} = \overline{E}$ ナルモ,

一方
$$f_t^{\circ -1} \cdots\cdots f_1^{\circ -1} f_1 \cdots\cdots f_t f_1^{\circ} \cdots\cdots f_t^{\circ}$$

ヲ考ヘルト $f_1^{\circ -1} \cdot f_1$ ハ (5) ト假定 (ロ) カラ定義サレル (但シ $\mathfrak{U}(e)$ ヲ充分 e ノ近クニトレバ) 以下同様ニシテ $\mathfrak{U}(e)$ ヲ充分小ニトレバ

$$f_t^{\circ -1} \cdots\cdots f_1^{\circ -1} f_1 \cdots\cdots f_t$$

ハ中央ヨリ積ヲ作レコトニヨリ $\mathfrak{K}$ ノ中デ次々ト積ヲ作ルコトが出来ル。ソレヲ g トスルト

$Lemma$ 1 カラ $\overline{G}=\overline{F_t^{\circ -1}\cdots\cdots F_t}$ トナル。即チ $\overline{GF_1^{\circ}\cdots\cdots F_t^{\circ}}=\overline{E}$ トナル。

故ニ $\mathfrak{U}(e)$ ヲ充分小ニスレバ，$\mathfrak{V}, \mathfrak{V}'$ ノ如何ニカヽハラズ $\overline{G}^{-1}=\overline{G'}^{-1}=\overline{F_1^{\circ}\cdots\cdots F_t^{\circ}}$ トナル。即チ $Lemma$ 1 カラ $g=g'$.

一方 (5) ヨリ $\mathfrak{U}(e)$ ヲ充分小ニスレバ g ハ何程デモ e ノ近クニ来ル。故ニ $g=e$ トナリ $\overline{F_1^{\circ}\cdots\cdots F_t^{\circ}}=\overline{E}$ トナル。

$\therefore\ \overline{A}=\overline{B}$. ――――

(二) $\mathfrak{G}$ が top. Gruppe トナルコト。

$\mathfrak{G}\ni\overline{A},\overline{B},\ \ \overline{A}=\overline{A_1\cdots\cdots A_r},\ \overline{B}=\overline{B_1\cdots\cdots B_s}$ ($B_i, A_i\in\mathfrak{M}$) トスルト與ヘラレタ $\overline{\mathfrak{U}}(\overline{A}\,\overline{B})$ ニ對シテ $Lemma$ 2 カラ

$$\overline{\mathfrak{U}}(\overline{A}\,\overline{B})\supset\overline{\mathfrak{U}}^{\circ}(\overline{A}\,\overline{B})=\overline{U_1(A_1)\cdots\cdots U_r(A_r)U_1'(B_1)\cdots\cdots U_s'(B_s)}$$

$=\overline{\mathfrak{U}}^{\circ}(\overline{A}\,\overline{B})$ がトレル。

$$\overline{\mathfrak{U}}(\overline{A})=\overline{U_1(A_1)\cdots\cdots U_r(A_r)},$$
$$\overline{\mathfrak{U}}'(\overline{B})=\overline{U_1'(B_1)\cdots\cdots U_s'(B_s)}.$$

トスレバ，$\overline{\mathfrak{U}}(\overline{A})\overline{\mathfrak{U}}'(\overline{B})\subset\overline{\mathfrak{U}}(\overline{A}\overline{B})$ トナル。故ニ積ハ連續デアル。

又 $\overline{\mathfrak{U}}(\overline{A})=\overline{U_1(A_1)\cdots\cdots U_r(A_r)},\ \overline{A}=\overline{A_1\cdots\cdots A_r}$ トスレバ

$$(\mathfrak{V}_i(a_i^{-1}))^{-1}\subset\mathfrak{U}_i(a_i)=\mathfrak{K}\text{ デ }\mathfrak{V}_i\text{ ヲトレバ}$$

$$\overline{\mathfrak{V}}(\overline{A}^{-1})=\overline{V_r(A_r')\cdots\cdots V_1(A_1')}\text{ トオケバ}$$

($\mathfrak{M} \ni A'_i \longleftrightarrow a_i^{-1} \in \mathfrak{K}$)

$\overline{\mathfrak{V}}(\bar{A}^{-1})^{-1} \subset \overline{\mathfrak{U}}(\bar{A})$ トナル。故ニ逆ハ連続デアル。

(ホ) $\mathfrak{K}$ ト $\mathfrak{G}$ トハ $\bar{\mathfrak{K}}$ – im Kleinen stetig isomorph ナルコト。

$\mathfrak{G}$ ノ中デ $\bar{A}$ ($A \in \mathfrak{M}$) ノ全体ヲ $\bar{\mathfrak{K}}$ トスル. $\bar{\mathfrak{K}}$ ハ $\mathfrak{G}$ デ $\bar{E}$ ノ近傍トナリ、$a \longleftrightarrow \bar{A}$ ナル一対一ノ対応デ $\mathfrak{K}$ ト $\bar{\mathfrak{K}}$ トガ homöomorph トナルコトハ其ノ近傍系 $\mathfrak{U}(a)$ ト $\bar{\mathfrak{U}}(\bar{A})$ トガ対応スルコトカラワカル。

(Lemma 2 参照). 又 im Kleinen stetig ナルコトハ Lemma 1 デアル。

Q. E. D.