799. 解析算法ニ就イテ II

近藤　基吉（北大）

4. 解析算法ノ表示　此処デ解析算法ノ表示ノ問題ヲ考ヘテ置カウ．Jヲ非可附番ノ compact 距離空間トスル．[J]デJノ閉ヂタ部分集合ノ族ヲ示ス．[J]ノ集合ノ間ニ距離ヲ次ノ様ニ定メル．即チ[J]ノ二ツノ集合EトFトニ對シテ $E \neq 0 \neq F$ ノトキニハ dis (E, F) デ

$$\underset{x \in E}{b.\,s.}\ dis\,(x, F) + \underset{y \in F}{b.\,s.}\ dis\,(E, y)$$

ヲ示シ少クトモ一方ガ空集合ノ時ニハ $E = F$ カ $E \neq F$ ニ從ツテ $dis(E, F) = 0$ カ 1 ト置ク．然ルトキニハ[J]ハ又 compact 距離空間デアル．

空間 R ニ對シテ合成空間 $R \times [J]$ ヲ考ヘル．Ⓗヲ此ノ合成空間デ定義サレタ函數トスル．ΕヲR×Jノ部分集合トスルトキニRノ一点 x ニ對シテ $E_{(x)}$ デR上ヘノ射影ガ x デアルヤウナΕノ点ノ集合ヲ示シ $E_{(x)}$ ノJ上ヘノ射影ヲ $E^{(x)}$ デ示ス．Εガ閉集合ナルトキニハ $E^{(x)}$ モ亦閉集合デアルカラ[J]ニ含マレル．其処デⒽニ依ツテRノ各点 x ニ實数 Ⓗ$(E_{(x)})$ ノ對應スル函数ヲ考ヘル．是ヲ

$$\Gamma(Ⓗ, R, J; E),\quad \Gamma(Ⓗ, R; E)\ 又ハ\ \Gamma(Ⓗ; E)$$

ノ一ツデ示シⒽニ關シテΕニ依ツテ篩ハレタ函数，Εヲ閉ヂタ篩，Ⓗヲ篩ノ底ト云フ．更ニ $\Gamma(Ⓗ; R)$ デΕガR×Jノ凡テノ閉ヂタ部分集合ヲ動クトキニ得ラレル $\Gamma(Ⓗ; E)$

ノ族ヲ示ス。

開ヂタ篩ニ依ッテ解析算法ヲ表示シタイト思フガ，其ノタメニ先ヅ定義ヲ與ヘテ置ク．$\Phi(F_n(x))$ ヲ空間Rデ定義サレタ解析算法トスル。$\mathfrak{F}$ ヲ Rデ定義サレタ函數ノラナル族トスルトキニ $\Phi(\mathfrak{F})$ デ $F_n(x)$ ガ $\mathfrak{F}$ ノ函數ヲ動クトキニ得ラレル函數 $\Phi(F_n(x))$ ノ族ヲ示ス．更ニRデ定義サレタ上及ビ下ニ半連續ノ函數ノ族ヲ夫々 $\mathcal{Y}(R)$ 及ビ $\mathcal{J}(R)$ デ示ス．然ル時ニ次ノ結果ガ得ラレル。

定理4. 空間Rデ定義サレタ任意ノ解析算法 $\Phi(F_n(x))$ ニ對シテ開ヂタ篩 $\Gamma(\text{Ⓗ};E)$ ヲ定義シテ

(1) $\Phi(\mathcal{Y}(R))=\Gamma(\text{Ⓗ};R)$

(或ヒハ $\Phi(\mathcal{J}(R))=\Gamma(\text{Ⓗ};R)$)

トナシ得ル．又逆ニ任意ノ開ヂタ篩 $\Gamma(\text{Ⓗ};E)$ ニ對シテ(1)ヲ滿足スル解析算法 $\Phi(F_n(x))$ ガ存在スル。

證明. $\mathcal{Y}(R)$ ノ場合ト $\mathcal{J}(R)$ ノ場合トハ同様ニ證明サレルカラ $\mathcal{Y}(R)$ ノ場合ヲ考ヘルコトニスル。

其処デ先ヅ次ノ補助定理ヲ證明シテ置ク。

補助定理 J_K $(K=1,2)$ ヲ非可附番ノ Compact 距離空間トスル．空間Rト $R\times[J_1]$ デ定義サレタ開ヂタ篩ノ底 Ⓗ_1 トニ對シテ $R\times[J_2]$ デ定義サレタ開ヂタ篩ノ底 Ⓗ_2 ヲ選ンデ

$$\Gamma(\text{Ⓗ}_1;R)=\Gamma(\text{Ⓗ}_2;R)$$

ノ成立スル様ニナシ得ル。

證明: 先ヅ J_2 ガ Cantor ノ discontinu △デア

ル場合ヲ考ヘル。Δ ヲ J_1 ニ変換スル連続変換ガ存在スル。$\varphi(y)$ ヲ夫トスル・其処デ $\textcircled{H}_2$ ヲ $R\times[\Delta]$ 上ニ定義シテ $\textcircled{H}_2(x\times E)=\textcircled{H}_1(x\times\varphi(E))$ トスル。然ル時ニハ $\Gamma(\textcircled{H}_1;R)=\Gamma(\textcircled{H}_2;R)$ ガ成立スル。即チ $\Gamma(\textcircled{H}_1;R)$ ノ函数 $F(x)$ ニ對シテ $F(x)=\Gamma(\textcircled{H}_1;H_1)$ ノ成立スル $R\times J_1$ ノ開集合 H_1 ガ存在スル。然ルニ $(x,\varphi(y))\in H_1$ ノ成立スル $R\times J_2$ ノ点 (x,y) ノ集合 H_2 ハ $R\times H_2$ デ開デ且ツ $\textcircled{H}_2$ ノ定義カラ $\Gamma(\textcircled{H}_1;H_1)=\Gamma(\textcircled{H}_2;H_2)$ ガ得ラレル。故ニ $F(x)\in\Gamma(\textcircled{H}_2;R)$ デアル。是ヨリ $\Gamma(\textcircled{H}_1;R)\subset\Gamma(\textcircled{H}_2;R)$ ガ得ラレル。同様ニ $\Gamma(\textcircled{H}_1;R)\supset\Gamma(\textcircled{H}_2;R)$ ガ成立シテ従ッテ又 $\Gamma(\textcircled{H}_1;R)=\Gamma(\textcircled{H}_2;R)$ デアル。

次ニ J_2 ガ任意ノ compact 非可附番距離空間ノ場合ヲ考ヘル。前ノ結果ニ依ッテ $R\times[\Delta]$ ノ上ニ函数 $\textcircled{H}_\Delta$ ヲ定義シテ $\Gamma(\textcircled{H}_1;R)=\Gamma(\textcircled{H}_\Delta;R)$ トナシ得ル故ニ $\Gamma(\textcircled{H}_1,R)=\Gamma(\textcircled{H}_2,R)$ ノ成立スル $R\times[J_2]$ 上ノ函数 $\textcircled{H}_2$ ノ存在ヲ証明スルニハ $\textcircled{H}_\Delta$ ニ對シテ $\Gamma(\textcircled{H}_\Delta,R)=\Gamma(\textcircled{H}_2,R)$ ノ成立スル $\textcircled{H}_2$ ガ $R\times[J_2]$ 上ニ存在スルコトヲ証明スレバ十分デアル。Δ ヲ J_2 ノ部分集合ニ変換スル位相変換ノ一ツ $\psi(y)$ ヲ選ンデ $R\times[J_2]$ 上デ函数 $\textcircled{H}_2$ ヲ次ノヤウニ定義スル。

$$\textcircled{H}_2(x\times E)=\textcircled{H}_\Delta(x\times\psi^{-1}(E\psi(\Delta)))$$

然ルトキニハ $R\times J_2$ ノ開集合 H ニ對シテ $\Gamma(\textcircled{H}_2;H)=\Gamma(\textcircled{H}_\Delta;\psi^{-1}(E\cdot R\times\psi(\Delta)))$ デアルカラ $\Gamma(\textcircled{H}_2,R)=\Gamma(\textcircled{H}_\Delta,R)$ ガ成立スル。　　　　(証明了)

定理4ノ証明。 補助定理ニヨツテJガ閉區間$[0,+1]$デアル場合ヲ考ヘレバ十分デアル。J上ニ閉區間$J_n=\left[\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}\right]$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ヲ取ル。Jノ開ガタ部分集合Hニ對シテJ_nHヲ考ヘル。$J_nH+\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ノ中デ座標ガ最大ノ點ヲ$\mu\left(J_nH+\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right)$トスル。其處デ

$$\lambda_n(H)=\nu^{-1}\left\{4n(2n+1)\mu\left(J_nH+\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right)-(4n+1)\right\}$$

ト置ク。$\Phi(F_n(x))$ノxニ於ケル局所解法$\Phi_x(y_n)$ニ對シテ$Ⓗ((x)\times H)=\Phi_x(\lambda_n(H))$トスル。然ルトキニⒽガ求メル篩ノ底デアル。即チ$R\times J$ノ開集合Hニ對シテ$H\cdot R\times J_n+R\times\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ハ閉集合デアルカラ

$$(2)\quad F_n(x)=\nu^{-1}\left\{4n(2n+1)\mu\left(H\cdot R\times J_n+R\times\left(\frac{1}{2n+1}\right)\right)-(4n+1)\right\}$$

ハRデ上ニ半連續デ、且ツⒽノ定義ニ依ツテ$\Gamma(Ⓗ;H)=\Phi(F_n(x))\in\Phi(\gamma(R))$デアル。是ヨリ$\Gamma(Ⓗ,R)\subset\Phi(\gamma(R))$ガ成立スル。次ニ$F_n(x)\in\gamma(R)$. $(n=1,2,\cdots\cdots)$ノ時ニハ

$$\frac{\nu(F_n(x))+(4n+1)}{4n(2n+1)}$$

ノ *image géométrique* C_nニ對シテ$H=\overline{\sum_{n=1}^{\infty}C_n}$ト置ケバHト$F_n(x)$トノ間ニハ(2)ガ成立スル。ソレ故ニ$\Phi(F_n(x))=\Gamma(Ⓗ;H)\in\Gamma(Ⓗ,R)$ガ得ラレ,

$\Phi(\gamma(R))\subset\Gamma(\text{Ⓗ},R)$デアル。従ッテ$\Phi(\gamma(R))=\Gamma(\text{Ⓗ},R)$デアル。即チ$\Phi(\gamma(R))$ハ開ヂタ篩デ表示サレル。

次ニコノ逆ノ問題ヲ考ヘル。Jヲ非可附番ノCompact距離空間トスル。R×〔J〕デ定義サレタ篩ノ底Ⓗガ與ヘラレタトキニ、補助定理ニ依ッテCantorノdiscontinu Δニ對シテR×〔Δ〕デ定義サレタ函數Ⓗ^*ヲ選ンデ$\Gamma(\text{Ⓗ},R)=\Gamma(\text{Ⓗ}^*,R)$トナシ得ル。故ニ$\Gamma(\text{Ⓗ},R)$ト解析算法トノ關係ヲ知ルニハ$\Gamma(\text{Ⓗ}^*,R)$ト夫トノ關係ヲ知レバ十分デアル。其処デRノ各点$x$ニ對シテ實數ニ關スル算法$\Phi_x(y_n)$ヲ次ノ様ニ定義スル。Δノ區間$(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ハ可附番デアルカラ夫レ等ヲ列ベルコトガ出來ル。$\{I_n\}(n=1,2,\cdots)$ヲ夫トスル。其處デ實數列$\{y_n\}(n=1,2,\cdots)$ニ對シテ

$$\Phi_x(y_n)=\text{Ⓗ}^*\Big(x\times\big(\Delta-\sum_{y_n<1}I_n\big)\Big)$$

トスル。$\Phi(F_n(x))$ヲRノ各点xニ於ケル局所算法ガ$\Phi_x(y_n)$デアルヤウナ解析算法トスル，然ル時ニハ$\Phi(\gamma(R))=\Gamma(\text{Ⓗ}^*,R)$ガ成立スル。即チ$F_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ヲ$\gamma(R)$ノ函數トスル時ニハ$H_n=E_{x}(F_n(x)\geqq 1)\ (n=1,2,\cdots)$ハ開集合デアルカラ

$$(3)\qquad H=\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{O(I_n)=k}H_n\times I_n$$

(但シ，$O(I_n)$ハI_nノ位數ヲ示ス)ハ又R×Δデ開集

合デアル。然ルニ R ノ各点 x ニ對シテ

$$\textcircled{H}^*(H^{(x)})=\textcircled{H}^*\Big((x)\times(\Delta-\sum_{F_n(x)<1}I_n)\Big)=\Phi_x(F_n(x))$$

ガ成立スル故ニ $\Gamma(\textcircled{H}^*;H)=\Phi(F_n(x))$ ガ成立シ從ツテ $\Phi(F_n(x))\in\Gamma(\textcircled{H}^*,R)$ 或ヒハ $\Phi(\gamma(R))\subset\Gamma(\textcircled{H}^*,R)$ デアル。次ニ $R\times\Delta$ ノ開集合 H ニ對シテ $H_n=\mathrm{Proj}_R\,H\cdot R\times I_n$ ノ特性函数ヲ $F_n(x)$ トスルトキニハ $F_n(x)\in\gamma(R)$ $(n=1,2,\text{-----})$ ガ成立シ且ツ H ト $F_n(x)$ トノ间ニハ (3) ガ成立シ從ツテ $\Phi(F_n(x))=\Gamma(\textcircled{H}^*;H)$ デアル故ニ $\Gamma(\textcircled{H}^*,H)\in\Phi(\gamma(R))$ ガ得ラレル。ソレ故ニ $\Gamma(\textcircled{H}^*,R)\subset\Phi(\gamma(R))$ ガ成立シ $\Gamma(\textcircled{H}^*,R)=\Phi(\gamma(R))$ ガアル。

（証明了）

5. 集合ニ関スル解析算法 $\Phi(F_n(x))$ ヲ空間 R デ定義サレタ解析算法トスル。是ノ局所算法ガ 0 ト 1 トヲ其ノ値トシテ取ル場合ニハ R ノ部分集合 E_n $(n=1,2,\text{-----})$ ノ特性函数 $\chi_{E_n}(x)$ ニ対シテ $\Phi(\chi_{E_n}(x))$ ハ R ノ部分集合ノ特性函数デアル。コノ部分集合ヲ E トスルトキニ。此処デ集合列 $\{E_n\}$ $(n=1,2,\text{-----})$ カラ集合 E ヲ構成スル算法ガ考ヘラレル。之レヲ集合ニ関スル解析算法ト云フ。

先ヅ（函数ニ関スル）解析算法ト集合ニ関スル解析算法トノ関係ヲ考ヘル。其ノタメニ定義ヲ與ヘテ置ク。$\Phi(E_n)$ ヲ空间 R ノ部分集合ニ對シテ定義サレタ解析算法トスル。R ノ閉集合カラナル族 $\mathfrak{F}(R)$（R ノ開集合カラナル族 $\mathcal{G}(R)$）ニ對シテ E_n ガ $\mathfrak{F}(R)$ $(\mathcal{G}(R))$ ノ集合ヲ動クトキニ得ラレル

$\Phi(E_n)$ノ族ヲ$\Phi(\mathfrak{F}(R))$($\Phi(\mathfrak{g}(R))$)デ示ス。

$\Psi(F_n(x))$ヲ R デ定義サレタ(函數ニ関スル)解析算法トスル時ニ任意ノ実数ノ集合Mニ対シテ集合 $Ens\,(F(x)\in M)$(但シ $F(x)\in\Psi(\gamma(R))$ (又ハ $F(x)\in\Psi(J(R))$))ノ族ヲ $Ens\,(\Psi(\gamma(R))\in M)$(又ハ $Ens\,(\Psi(J(R))\in M)$)デ示ス。

特ニ $M=[a,+\infty]$ ノ時ニ $Ens\,(\Psi(\gamma(R))\in M)$(又ハ $Ens\,(\Psi(J(R))\in M)$)ヲ簡単ニ $Ens\,(\Psi(\gamma(R))\geqq a)$(又ハ $Ens\,(\Psi(J(R))\geqq a)$)デ示ス。同様ニ $Ens\,(\Psi(\gamma(R))>a)$, $Ens\,(\Psi(\gamma(R))\leqq a)$ 等ヲ定義スル。

定理5. $\Phi(F_n(x))$ヲ空間Rデ定義サレタ解析算法ノ、Mヲ任意ノ実数ノ集合トスルトキニRデ定義サレタ集合ニ関スル解析算法$\Psi(E_n)$ヲ適当ニ選ンデ

$$\text{又ハ}\left.\begin{matrix} Ens\,(\Phi(\gamma(R))\in M) \\ Ens\,(\Phi(J(R))\in M)\end{matrix}\right\} = \left\{\text{又ハ}\begin{matrix}\Psi(\mathfrak{F}(R)) \\ \Psi(\mathfrak{g}(R))\end{matrix}\right.$$

トナシ得ル.

証明. 他ノ場合ハ同様ニ証明サレルカラ、此処デ $Ens\,(\Phi(\gamma(R))\in M)$ ニ対シテ $Ens\,(\Phi(\gamma(R))\in M)=\Psi(\mathfrak{F}(R))$ ノ成立スル集合ニ関スル解析算法$\Psi(E_n)$ガ存在スルコトヲ証明スル. 先ヅRノ開集合ノ特性函數ノ列カラ $\gamma(R)$ ノ函數ヲ構成スル算法 $\gamma(F_n(x))$ ヲ定義ス

ル．有理数全体ヲ列ベル．$\{r_n\}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ノソノ一ツトスル．其処デ R ノ開集合 E_n $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ノ特性函数 $\chi_{E_n}(x)$ ＝対シテ

$$\gamma(\chi_{E_n}(x))=b_n.s.\{\delta(r_n\chi_{E_n}(x))\},$$

但シ $\delta(0)=-\infty$，$\delta(x)=x$ $(x\neq 0)$，

ト置ク．$\gamma(\chi_{E_n}(x))$ ハ $\gamma(R)$ ノ函数デ且ツ $\gamma(R)$ ノ凡テノ函数ハ $\gamma(F_n(x))$ カラ得ラレルコトハ明カデアル。

次＝ $\Phi^*(F_n(x))$ ヲ次ノ様＝定義スル．R ノ各点 x ＝對シテ $\Phi_x(y_n)\in M$ ノ時＝ $\Phi^*_x(y_n)=1$，$\Phi_x(y_n)\overline{\in}M$ ノトキ＝ $\Phi^*_x(y_n)=0$ トスル，是＝對シテ $\Phi^*(\gamma(F_{2^n(2k-1)}(x)))$ ヲ考ヘル。$F^{(0)}_{2^n(2k-1)}(x)$ ガ R ノ開集合ノ特性函数デアル時＝ $\gamma(F^{(0)}_{2^n(2k-1)}(x))$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ハ上＝半連続デアルカラ $\Phi^*(\gamma(F^{(0)}_{2^n(2k-1)}(x)))$ ハ $E_{ns}(\Phi(\gamma(R))\in M)$ ノ集合ノ特性函数デアリ、又 $E_{ns}(\Phi(\gamma(R))\in M)$ ノ任意ノ集合 E ノ特性函数 $\chi_E(x)$ ＝對シテハ $\chi_E(x)=\Phi^*(F_n(x))$ ノ成立スル $\gamma(R)$ ノ函数 $F_n(x)$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ存在スル故＝

$$\chi(E)=\Phi^*(\gamma(F^{(0)}_{2^n(2k-1)}(x)))$$

ノ成立スル R ノ開集合ノ特性函数 $F^{(0)}_n(x)$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ存在スル，從ッテ $\Phi^*(\gamma(F_{2^n(2k-1)}(x)))$ ノ定義スル集合＝関スル解析算法 $\mathfrak{F}(E_n)$ ＝対シテ $E_{ns}(\Phi(\gamma(R))\in M)=\mathfrak{F}(\mathfrak{F}(R))$ デアル，（証明了）

系　<u>$\Phi(F_n(x))$ ヲ空間 R デ定義サレタ解析算法トスル時＝任意ノ実数 a ＝對シテ</u>

$$\mathrm{Ens}(\Phi(\gamma(R)) \geqq a)\ (\text{又ハ}\ \mathrm{Ens}(\Phi(\gamma(R)) < a)) = \Phi(\mathfrak{F}(R))$$

ノ成立スル集合ニ関スル解析算法 $\Phi(E_n)$ ガ存在スル。

次ニ集合ニ関スル解析算法ノ表示ヲ考ヘル。J ヲ非可附番ノ compact 距離空間トスル。空間 R ニ對シテ合成空間 $R\times[J]$ ヲ考ヘル。$\mathfrak{N}$ ヲ是ノ部分集合トスル。$R\times J$ ノ開集合 E ニ對シテ $E_{(x)} \in \mathfrak{N}$ ノ成立スル x ノ集合ヲ

$$\Gamma(\mathfrak{N}, R; J; E), \quad \Gamma(\mathfrak{N}, R; E)$$
$$\text{又ハ}\ \Gamma(\mathfrak{N}; E)$$

ノ一ツデ示シ $\mathfrak{N}$ ニ関シテ E ニ依ッテ篩ハレタ集合 E ヲ開ケタ篩，$\mathfrak{N}$ ヲ篩ノ底ト云フ。更ニ E ガ $R\times J$ ノ凡テノ開集合ヲ動クトキニ得ラレル $\Gamma(\mathfrak{N}; E)$ ノ族ヲ $\Gamma(\mathfrak{N}, R)$ デ示ス。

定理6. $\Phi(E_n)$ ヲ空間 R デ定義サレタ集合ニ関スル解析算法トスルトキニ $R\times[J]$（J ハ非可附番ノ Compact 距離空間）ノ部分集合 $\mathfrak{N}$ ヲ定義シテ

(1) $\Phi(\mathfrak{F}(R))(\text{又ハ}\ \Phi(\mathfrak{g}(R))) = \Gamma(\mathfrak{N}, R)$

トナシ得ル。又逆ニ任意ノ $R\times[J]$ ノ部分集合 $\mathfrak{N}$ ニ対シテ (1) ヲ満足スル集合ニ関スル解析算法 $\Phi(E_n)$ ガ存在スル。

証明。次ノ補助定理ヲ証明スル。

補助定理　R ガ定義サレタ函数ニ関スル解析算法 $\Phi(F_n(x))$ ヲ選ンデ

$\Phi(\mathfrak{F}(R))$（又ハ $\Phi(g(R))$）$= Ens(\Phi(\gamma(R)) \geqq 1)$

トナシ得ル。

証明. $\Phi(E_n)$ ヲ定義スル函数ニ関スル解析算法ノ一ツテ $\Phi(F_n(x))$ トスルトキニ解析算法 $\Phi^*(F_n(x))$ ヲ定義シテ $\Phi^*(F_n(x)) = \Phi(\sigma(F_n(x)))$（但シ, $t \geqq 1$ ノ時ニ $\sigma(t)=1$, $t<0$ ノトキニ $\sigma(t)=0$）トスレバ $\Phi(\mathfrak{F}(R)) = Ens(\Phi^*(\gamma(R)) \geqq 1)$ ノ成立スルコトハ明ラカデアル. $\Phi(g(R))$ ニ對シテモ同様デアル。

（証明了）

定理6ハ補助定理並ビニ定理4ヨリ明ラカデアル。

（証明了）

最後ニ集合ニ関スル解析算法ノ構造ヲ考ヘル. 先ヅ定義ヲ與ヘル. 空間 R ニ於ケル集合ニ関スル解析算法 $\Phi(E_n)$ ノ中デ特ニ $\Phi(E_n) = R - E_1$ デ與ヘラレルモノヲ opération complémentarie ト云ヒ, 又 $\Phi(E_n)$ ヲ與ヘル函数ニ関スル解析算法ガ topologique（又ハ homogène）ナルモノヲ集合ニ関スル opération topologique（又ハ homogène）ト云フ. 集合ニ関スル opérations topologique ノ例トシテ

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n, \quad \prod_{n=1}^{\infty} E_n, \quad \sum_{\gamma} \prod_{k=1}^{\infty} E_{n_k}$$

等ヲ上ゲルコトガ出来ル。

定理7. 集合ニ関スル解析算法 $\Phi(E_n)$ ハ集合 E_n ($n = 1, 2, \cdots\cdots$) ニ opération complémentaire ト

opération topologique トヲ繰返シテ施シテ得ラレル。

第一証明. $\triangle$ ヲ Cantor ノ discontinu トスル時ニ $R \times [\Lambda]$ (R ハ $\Phi(E_n)$ ノ定義サレタ空間) ノ部分集合 $\mathfrak{N}$ ヲ選ンデ $\Gamma(\mathfrak{N}, R) = \Phi(\mathfrak{F}(R))$ トナシ得ル。

$\triangle$ ノ區間ヲ列ニ列ベル. 其ノ一ツヲ $\{I_n\}$ $(n=1,2,\text{------})$ トスル. R ノ部分集合 E_n $(n=1,2,\text{------})$ ニ對シテ

$$E = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{o(I_n)=k} E_n \times I_n$$

ト置ク. (但シ $O(I_n)$ ハ I_n ノ位数ヲ示ス) R ノ一点 x ト $\mathfrak{N}^{(x)}$ ノ集合 N ヲ取ル. ($\mathfrak{N}^{(x)} = 0$ ノ時ニハ常ニ $x \overline{\in} \Phi(E_n)$ デアルカラ $\mathfrak{N}^{(x)} \neq 0$ ノ場合ヲ考ヘル) 其處デ $N = E^{(x)}$ ノ條件ヲ求メル. 是ハ

$$\left(N - \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{o(I_n)=k} E_n^{(x)} \times I_n\right) + \left(\prod_{k=1}^{\infty} \sum_{o(I_n)=k} E_n^{(x)} \times I_n - N\right) = 0$$

或ヒハ

$$(1) \quad x \in x - Proj_R \left\{\left(N - \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{o(I_n)=k} E_n^{(x)} \times I_n\right) + \left(\prod_{k=1}^{\infty} \sum_{o(I_n)=k} E_n^{(x)} \times I_n - N\right)\right\}$$

デアル。然ルニ

$$Proj_R\left(N - \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{o(I_n)=k} E_n^{(x)} \times I_n\right) = Proj_R \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{o(I_n)=k} \left(N - E_n^{(x)} \times I_n\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu\in N} \prod_{o(I_n)=k} \Lambda_\nu \left(E_n^{(x)}\right)$$

$$\mathrm{Proj}_R\left(\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{o(I_n)=k} E_n^{(x)}\times I_n - N\right) = \sum_{\nu\in N}\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{o(I_n)=k\\ \nu\in I_n}} E_n^{(x)}$$

但シ $\Lambda_\nu\left(E_n^{(x)}\right) = E_n^{(x)}$ （$\nu \overline{\in} I_n$ ノ時）

$$= R - E_n^{(x)} \quad (\nu \in I_n \text{ ノ時})$$

デアルカラ

$$x - \mathrm{Proj}_R\left\{\left(N - \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{o(I_n)=k} E_n^{(x)}\times I_n\right) + \left(\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{o(I_n)=k} E_n^{(x)}\times I_n - N\right)\right\}$$

$$= x - \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu\in N}\prod_{o(I_n)=k}\Lambda_\nu\left(E_n^{(x)}\right) + \sum_{\nu\in N}\prod_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{o(I_n)=k\\ \nu\in I_n}} E_n^{(x)}\right.$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{\nu\in N}\sum_{o(I_n)=k}\Lambda_\nu\left((R-E_n)^{(x)}\right) \cdot \prod_{\nu\in N}\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\substack{o(I_n)=k\\ \nu\in I_n}}(R-E_n)^{(x)}$$

ガ成立スル。従ッテ(1)ト $\mathfrak{N}$ ノ定義トカラ

$$\Psi(E_n) = \sum_{x\in R}\sum_{N\in\mathfrak{N}^{(x)}}\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{\nu\in N}\sum_{o(I_n)=k}\Lambda_\nu\left((R-E_n)^{(x)}\right)\prod_{\nu\in N}\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{\substack{o(I_n)=k\\ \nu\in I_n}}(R-E_n)^{(x)}$$

ガ得ラレル。即チ $\Psi(E_n)$ ハ R ノ各点 x ニ於イテ $E_n^{(x)}$ ト $(R-E_n)^{(x)}$ トニ加法ト乗法トヲ施シテ得ラレル。然ルニ加法ト乗法トハ集合ニ関スル *opération topologique* デアルカラ $\Psi(E_n)$ ハ E_n $(n=1,2,\text{-----})$ ニ *opération complémentaire* ト *opération topologique* ト

ヲ施シテ得ラレル。　　　　　　　　　　（証明了）

第二証明．定理3ヲ使用スル証明方法デアル。先ヅ次ノ補助定理ヲ証明スル。

補助定理　$\Phi(F_n(x))$ ヲ函数ニ関スル opération topologique トスルトキニ集合ニ関スル opération topologique $\Psi(E_n)$ ヲ定義シテ任意ノ実数 r ニ対シテ

$$(1)\quad E_{ns}\left(\Phi(F_n(x))\geqq r\right)=\prod_{K=1}^{\infty}\Psi^*\left(E_{ns}\left(F_n(x)\geqq r-\frac{1}{K}\right)\right)$$

ノ成立スル様ニナシ得ル。

証明．$\Phi(F_n(x))$ ニ対シテ解析算法 $\Phi^*(F_n(x))$ ヲ定義シテ $\Phi(F_n(x))\geqq 1$ ノ時ニ $\Phi^*(F_n(x))=1$，然ラザル時ニ $\Phi^*(F_n(x))=0$ トスル。

其処デ $\Phi^*(F_n(x))$ デ與ヘラレル集合ニ関スル解析算法ヲ $\Psi^*(E_n)$ トスレバ (1) ガ成立スル。即チ x_0 ヲ $E_{ns}(\Phi(F_n(x))\geqq r)$ ノ一点トスレバ x_0 ニ於ケル $\Phi(F_n(x))$ ノ局所算法 $\Phi_{x_0}(y_n)$ ニ対シテ $\Phi_{x_0}(F_n(x_0))\geqq r$ デアル．故ニ $\Phi_{x_0}(y_n)$ ノ底ヲ $\mathfrak{N}^{(x_0)}$ トスレバ任意ノ自然数 K ニ対シテ $\underset{j}{b.i.}\,F_{n_j}(x_0)\geqq r-\frac{1}{K}$ ノ成立スル無理数 $(n_1, n_2, \cdots\cdots)$ ガ $\mathfrak{N}^{(x_0)}$ ニ存在スル．従ッテ

$$x_0\in\Psi^*\left(E_{ns}\left(F_n(x)\geqq r-\frac{1}{K}\right)\right)\quad (K=1,2,\cdots\cdots)$$

ガ成立シ x_0 ハ (1) ノ右辺ニ含マレル。x_0 ガ (1) ノ右辺ニ含マレル時ニハ $\underset{j}{b.i.}\,F_{n_j}(x_0)\geqq r-\frac{1}{K}$ ノ成立スル無理数 $(n_1, n_2, \cdots\cdots)$ ガ $\mathfrak{N}^{(x_0)}$ ニ含マレル故ニ $x_0\in E_{ns}(\Phi(F_n(x))\geqq r)$

ガ成立シ (1) ガ証明サレル。　　　　　　　　(証明了)

定理ノ証明。　$\Phi(E_n)$ ヲ定義スル函数ニ関スル解析算法ヲ $\Phi(F_n(x))$ トスレバ此ノ論文ノ $\boxed{\text{追記}}$ ニ依ッテ

$$\Phi(F_n(x)) = \Phi^*\left(\overline{\lim_{t\to\infty}}\, R_n(t\,;\, F_K(x))\right)$$

ノ成立スル opération topologique $\Phi^*(F_n(x))$ ガ存在スル。

故ニ補助定理ニヨッテ $Ens(\Phi(F_n(x)) \geqq 1)$ ハ

$Ens\left(\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, R_n(t\,;\, F_K(x)) \geqq 1 - \frac{1}{j}\right)\ (n, j = 1, 2, \cdots\cdots)$

ニ opération topologique ヲ施シテ得ラレル。然ルニ $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}$ ハ又 opération topologique ナル故ニ

$Ens\left(\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, R_n(t\,;\, F_K(x)) \geqq 1 - \frac{1}{j}\right)$ ハ $Ens\left(R_n, t\,;\, F_K(x) \geqq 1 - \frac{1}{j} - \frac{1}{j'}\right)\ (t, j' = 1, 2, \cdots\cdots)$ ニ opération topologique ヲ施シテ得ラレル。然ルニ $R_n(t\,;\, F_K(x))$ ハ $\sigma(t, F_K(x)\,;\, b\,;\, m)$ ノ形ノ fonction non negative ノ有限個ノ積デアルカラ容易ニ分ルヤウニ $Ens\left(R_n(t\,;\, F_K(x)) \geqq 1 - \frac{1}{j} - \frac{1}{j'}\right)$ ハ $Ens(\sigma(t, F_K(x)\,;\, b, m) \geqq \delta)$ ノ形ノ集合ニ opération topologique ヲ施シテ得ラレル。

然ルニ $\sigma(t, F_K(x)\,;\, b, m)$ ノ定義カラ結局 $E_n(\Phi(F_n(x)) \geqq 1)$ ハ $Ens(|\nu(F_K(x)) - b| \geqq \delta)$ (b, δ ハ有理数) ニ opération topologique ヲ繰返シテ施シテ得ラレ

ル。此処デ

$$Ens\left(|\nu(F_k(x)) - b| \geqq \delta\right)$$
$$= Ens\left(\nu(F_k(x)) - b \geqq \delta\right) Ens\left(b - \nu(F_k(x)) \geqq \delta\right)$$
$$= Ens\left(\nu(F_k(x)) - b \geqq \delta\right) \prod_{m=1}^{\infty}\left(R - Ens\left(\nu(F_k(x)) \geqq b - \delta + \frac{1}{n}\right)\right)$$

デアルカラ、$Ens(\Phi(F_n(x)) \geqq 1)$ ハ $Ens(\nu(F_k(x)) \geqq \lambda)$ 及ビ其補集合ニ opération topologique ヲ繰返シテ施シテ得ラレル。然ルニ opération topologique ヲ繰返シテ施シテ得ラレル算法ハ topologique デアルカラ。従ッテ $Ens(\Phi(F_n(x)) \geqq 1)$ ハ $Ens(\nu(F_k(x)) \geqq \lambda)$ 及ビ其補集合ニ opération topologique ヲ施シテ得ラレル。殊ニ特ニ $F_k(x)$ ガ R ノ部分集合 E_n ノ特性函数ノ時ニハ $Ens(\Phi(F_n(x)) \geqq 1) = \Phi(E_n)$ ガ E_n 及ビ其補集合ニ opération topologique ヲ施シテ得ラレル。

——(証明了)——

追記 定理3デハ $\Phi(F_n(x))$ ノ具体的ナ形ヲ与ヘテ置カナカッタガ、夫ガ判ッテ居レ方ガ都合ガヨイノデ此処デ補ッテ置キタイ。然ルニ $\Phi(F_n(x))$ ノ取ル値ガ0カ又ハ1デアル場合ヲ考ヘテオケバ一般ノ場合ハコノ場合カラ直ニ判ルカラ此場合ノミヲ考ヘテ置カウ。（記号ハ定理2ノ証明ニ用ヒタルモノニ依ル）

$-1 \leqq a_K \leqq 1$ $(K=1, 2, \cdots\cdots, n)$ ヲ満足スル有理数 a_K ニテ定義サレル矩形 $R(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$ ノ全体ハ可

附番デアルカラ夫レヲ列ニ列ベルコトガ可能デアル．其ノ一ツヲ $\{R_K\}$ $(K=1, 2, \cdots\cdots)$ トスル．今 R_j ハ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ デ定義サレタ矩形，即チ $R_j = R(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$ デアルトスル．然ル時ニハ

$$\sigma(t, y; a, n) = \frac{t}{t + |n(\nu(y) - a)|^t} \quad (t=1, 2, \cdots\cdots)$$

ニ対シテ $R(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$ ノ特性函数ハ

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, R_j(t; y_k)$$

$$\text{但シ } R_j(t; y_k) = \prod_{k=1}^{n} \sigma(t, y_k, a_k, n)$$

デ與ヘラレル．其処デ $\Phi(F_n(x))$ ノ定義サレタ空間Rノ各点 x ニ対シテ

$$\{y_n^{(0)}\} = \prod_{k=1}^{\infty} R_{n_k}, \quad \Phi_x(y_n^{(0)}) = 1$$

ノ成立スル $\{y_n^{(0)}\}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ ノ存在スルヤウナ無理数 $(n_1, n_2, \cdots\cdots)$ ノ集合ヲ $\mathfrak{N}^{(x)}$ トシ

$$\Phi^*(F_n(x)) = \underset{\mathfrak{N}^{(x)}}{l.s.}\,(\underset{k}{l.i.}\, F_{n_k}(x))$$

トスレバ

$$\Phi(F_n(x)) = \Phi^*(\overline{\lim_{t\to\infty}}\, R_n(t; F_k(x)))$$

ノ成立スルコトハ定理2ヨリ明カデアル．

函数ニ関スル解析算法 $\Phi(F_n(x))$ ノ定義サレル函数列 $\{F_n(x)\}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ ノ範囲ニツイテ奇リノヲ落シ

タカラ補ッテオクガ、今後コノ論文デハ亜$(F_n(x))$ノ局所算法ハ凡テノ実数列ニ対シテ定義サレルト假定シテ置ク。従ッテコノ條件ヲ満足シナイモノハ定義域ヲ適当ニ拡張シテ此條件ヲ満足スル様ニシテ考察スル。

定理7ハ其ノ証明デ判ルヤウニ亜(E_n)ハE_nト$R-E_n$トニ*opération topologique*ヲ施シテ得ラレルト改メ得ル。

$\boxed{\text{訂正}}$　解析算法ニツイテIノ第286頁ノ下ヨリ第十一，二，三行ノ式ハ次ノ様ニ訂正シマス。

$$y^{(0)}_{m_{\nu_k}} = 1 \qquad (k=1,2,\cdots\cdots)$$

$$y^{(0)}_{m_j} = \frac{1}{2} \qquad (j \neq \nu_k,\ k=1,2,\cdots\cdots)$$

$$y^{(0)}_{n} = 0 \qquad (n \neq m_k,\ k=1,2,\cdots\cdots)$$