797. コムパクト群ノ連續表現ニツイテ

河田　敬義（東大）

H. Weyl: "*The classical groups.*" 及ビ *H. Weyl*（山内氏譯）"群論ト量子力學"（夫々 W.I., W II トシテ引用スル）ノ中デ群ノ表現ニ關シテ二三氣付イタコトヲ述ベタイト思ヒマス。色々ト教ヘテイタダイタ安倍君ニ厚ク感謝致シマス。

1

n 次ノ unitary group $\mathfrak{U}_n$ ノスベテノ連續既約表現ヲモトメル問題ガアル。

（勿論 $A=(a_{ij})$ トスル時 Norm $\|A\|=\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}$ デ topology ヲ與ヘルモノトスル。）

full linear group $\mathfrak{C}_n$ ノ subgroup $\mathfrak{G}$ ニ對シテ

$\mathfrak{G}^n = \mathfrak{G}\times\cdots\cdots\times\mathfrak{G}$,（$n=1,2,\cdots\cdots$）（Kronecker 積）

$\overline{\mathfrak{G}}$.（complex conjugate）

$\tilde{\mathfrak{G}}$（contragredient transformation

$A\to(A^{-1})'$）

$|\mathfrak{G}|$ (determinant, $A \to |A|$)

或ハ之レ等ノ Kronecker 積ハ $\mathfrak{G}$ ノ連続表現ヲ與ヘル。

$\mathfrak{G} \subset \mathfrak{U}_n$ ナラバ $\overline{\mathfrak{G}} = \widetilde{\mathfrak{G}}$ トナル。以下 $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{U}_n$ ノ closed subgroup ニ限ル。$\mathfrak{G}$ ハ compact ナル故 $\mathfrak{G}$ ノ連続表現ハ unitary 表現ト同値（$\sim$ トカク）デアルカラ（例ヘバ v. Neumann: "almost periodic functions in a group." Trans. Amer. 36. (N. I)）完全可約デアル。

$\mathfrak{G}$ ノ unitary 表現 $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ ガアッテ，$\mathfrak{D}_1$ ガ $\mathfrak{D}_2$ ヲ分解シテ得ラレルトキ，即チ

$$\mathfrak{D}_2 \sim \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{D}_1' \end{pmatrix}, \quad (\text{之レヲ } \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_1' \text{ トカク})$$

ナルトキ，$\mathfrak{D}_1$ ヲ $\mathfrak{D}_2$ ノ因子ト呼ビ、$\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2$ トカクコトニスル。$\mathfrak{D}_1$ ガ既約表現ナラ既約因子ト呼ブ。

明カニ $\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_1' \subset \mathfrak{D}_2'$ ナラバ $\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_1' \subset \mathfrak{D}_2 \times \mathfrak{D}_2'$ デアル。

$\mathfrak{G}$ ノスベテノ連続既約表現ヲモトメルコトニ對シテ

〔A〕 (Burnside)『$\mathfrak{G}$ ガ有限群ナラバ，$\mathfrak{G}$ ノスベテノ既約表現ハ $\mathfrak{G}^n$ ($n = 1, 2, \cdots\cdots$) ノ因子トシテ得ラレル。』

然シコノコトハ一般ニハ成立シナイ。

例：円周ノ廻轉群ノトキ $|\mathfrak{G}|^{-1}$ ハ $\mathfrak{G}^n$ ($n = 1, 2, \cdots\cdots$) ニハ含マレナイ。

[B] (*Weyl* II. p. 345.) 『$\mathfrak{U}_n$ ノスベテノ連続既約表現ハ $\mathfrak{g}^r$ $(r=1,2,-----)$ ノ既約因子及ビ 1 (*identical* ナ表現) ト $|\mathfrak{g}|^{-m}$ $(m=1,2,-----)$ トノ積トシテ得ラレル』

又一般ニ

[B′] 『(B) ハ $\bar{\mathfrak{U}}_n$ デナク、ソノ *closed subgroup* $\mathfrak{g}$ ニツイテモ成立スル』

[B] ノ証明ヲ *Weyl* II デハ実際ニモトメルコトニヨリ與ヘテキルガ. コゝデハ [B], [B′] ヲ N. I ノ理論ヲ用ヒテ証明スル。ソレニハ先ヅ

[C] 『$\mathfrak{g}$ ノスベテノ連続規約表現ハ $\mathfrak{g}^l\times\bar{\mathfrak{g}}^m$ $(l, m=0,1,2,-----)$ ノ因子トシテモトメラレル』

(証明) $\mathfrak{g}\ni S=(u_{ij}(S))$ トスルト $\mathfrak{g}^l\times\bar{\mathfrak{g}}^m$ ノ組成分子トシテ、スベテノ $u_{ij}(S)$ ニツイテ l 次, $\bar{u}_{ij}(S)$ ニツイテ m 次ノ単項式ガ得ラレル。故ニ $\mathfrak{g}^l\times\bar{\mathfrak{g}}^m$ ヲ既約因子ノ和ニ分解シテ, 同値ノモノカラ一ツヅゝ代表ヲトリ、$\mathfrak{D}^{(1)}$, ---------- $\mathfrak{D}^{(r)}$ ヲ互ニ同値デナイ既約因子トスルト、ソノ組成分子 $D^{(i)}_{\rho\sigma}(S)$ $(i=1,-----,r)$ ノ一次結合トシテ、スベテノ $u_{ij}(S)$ ニツイテ l 次, $\bar{u}_{ij}(S)$ ニツイテ m 次ノ *homogeneous polynomial* ハ得ラレル。

故ニ $\mathfrak{g}^l\times\bar{\mathfrak{g}}^m$, $(l, m=0,1,2,-----)$ ノ既約因子中同値デナイモノヲ $\mathfrak{D}^{(1)}, \mathfrak{D}^{(2)}$, ----- トスレバ $D^{(i)}_{\rho\sigma}(S)$ ノ *linear combination* トシテスベテノ $u_{ij}(S)$, $\bar{u}_{ij}(S)$ ノ *polynomial* ハ得ラレル。

今 $f(S)$ ヲ $\mathfrak{g}$ ノ任意ノ連続函数トスル。又ハ $f(S)=f(u_{11}(S)$,

$\cdots\cdots, u_{nn}(s)$) トカケル $u_{11}(s), \cdots\cdots, u_{nn}(s)$ ノ連続函数ト見テモヨイ。

$$u_{ij}(s)=\alpha_{ij}(s)+\sqrt{-1}\,\beta_{ij}(s)$$

ト実部ト虚部ニ分ケルト $2n^2$ 箇ノ $\alpha_{ij}(s)$, $\beta_{ij}(s)$ ノ連続函数トミラレル。$2n^2$ 箇ノ実独立変数 $\alpha_{ij}(s)$, $\beta_{ij}(s)$ ノ連続函数トミナスタメニハ、ソノ定義区域ガ $2n^2$ 次元ノユークリッド空間ノアル bounded closed set $\mathfrak{L}$ トナル。(例ヘバ $\mathfrak{g}=\tilde{\mathfrak{u}}_n$ ノ時ハ

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_{ij}(s)+\sqrt{-1}\,\beta_{ij}(s)\right)\left(\alpha_{ik}(s)+\sqrt{-1}\,\beta_{ik}(s)\right)$$
$$=\delta_{jk}$$

デ定義サレル closed set. bounded ナルハ $|u_{ij}(s)|\leqq 1$ カラ ——).

故ニ実変数ノ複素係数ノ polynomial P ニヨリ f ハ $\mathfrak{L}$ 上デ一様ニ近似出来ル。(Weierstrass ノ定理):

$$|f(s)-P_0(\alpha_{11}(s),\cdots\cdots,\beta_{nn}(s))|<\varepsilon \quad \text{on } \mathfrak{L}$$

又ハ
$$\alpha_{ij}(s)=\frac{1}{2}\left(u_{ij}(s)+\bar{u}_{ij}(s)\right),$$

$$\beta_{ij}(s)=\frac{1}{2i}\left(u_{ij}(s)-\bar{u}_{ij}(s)\right),$$

ヲ代入シテ

$$|f(s)-P_1(u_{11}(s),\cdots\cdots,u_{nn}(s),\overline{u_{11}(s)},\cdots\cdots$$
$$\cdots,\overline{u_{nn}(s)}|<\varepsilon,\quad s\in\mathfrak{g}.$$

サテ今 $\mathfrak{D}^{(1)}, \mathfrak{D}^{(2)}, \cdots\cdots$ デ $\mathfrak{g}$ ノスベテノ連続規約表現ヲツクシテナイトスレバ、ソレ等ト同値デナイ $\mathfrak{D}$ ヲトリ

$f(s)=\chi(s)$（$\mathfrak{D}$ ノ指標）トスレバ $f(s)$ ハスベテノ

$D^{(i)}_{\rho\alpha}(s)$ $(i=1,2,\cdots\cdots)$ ト直交スル。故ニソノ一次結合デアル $P_1(u_{11}(s),\cdots\cdots,\overline{u_{nn}}(s))$ トモ直交スル。

$$\therefore\ \chi(1)=\underset{s}{M}\,\overline{f(s)}\cdot f(s)$$

$$=\underset{s}{M}\,\overline{f(s)}\cdot\left(f(s)-P_1(u_{11}(s),\cdots\cdots,\overline{u_{nn}(s)})\right)$$

$$\leqq Max\,|f(s)|\cdot\varepsilon$$

故ニ $\varepsilon\to 0$ トスレバ $\chi(1)=0$ トナリ矛盾ヲ生ズル。故ニ〔C〕ハ証明セラレタ。

〔C〕カラ〔B′〕ヲ出スニハ

$\overline{\mathfrak{G}}=\widetilde{\mathfrak{G}}$ カラ $(u_{ij}(s))'=(u_{ij}(s))^{-1}=|u_{ij}(s)|^{-1}(p_{ij}(s))$,

$p_{ij}(s)$ ハ $u_{ij}(s)$ ノ $n-1$ 次ノ homogeneous polynomial

カラ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ既約因子 $\mathfrak{D}$ ハ

$$\mathfrak{D}\subset|\mathfrak{G}|^{-1}\times\mathfrak{G}^{n-1}$$

故ニ $\mathfrak{G}^{l}\times\overline{\mathfrak{G}}^{m}$ ノ既約因子 $\mathfrak{D}_1$ ハ

$$\mathfrak{D}_1\subset|\mathfrak{G}|^{-m}\times\mathfrak{G}^{l+m(n-1)}$$

トナル。即チ〔B′〕——

$\mathfrak{G}$ ノ例トシテ orthogonal group, unimodular unitary group ガアル。

其等デハ夫々 $|\mathfrak{G}|^{-1}=|\mathfrak{G}|$, $|\mathfrak{G}|=1$ ナル故

〔B″〕『orthogonal group 及ビ unimodular group ノスベテノ連続既約表現ハ 1 及ビ $\mathfrak{G}^{n}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ノ因子デアル』

又，$\mathfrak{G}$ ガ有限群デ、ソノ order ガ n ナリトスレバ

$$|\mathfrak{g}|^{n}=1,\quad 又ハ\quad |\mathfrak{g}|^{-1}=|\mathfrak{g}|^{n-1}$$

故ニ〔B′〕カラ〔A〕モ出ル。

〔A〕ハ又 A. Weil ノ定理（紙上談話会，淡野氏 164 号 p. 404 参照）ト関係ガアル。

$\mathfrak{C}_n$ ノ subgroup $\mathfrak{h}$ ガ整係数多項式 $f(\mathfrak{h})=0$ ヲ満足スルトスレバ $\mathfrak{h}$ ノ subcyclic group $\{s\}$ モ $f(\{s\})=0$ ヲ満足スル。f ノ次数ヲ m トスレバ，コノコトハ $\{s\}^{m+\nu}$ ノ既約表現ハ $1, \{s\}, \cdots\cdots \{s\}^{m}$ ノドレカノ因子ナルコトヲ意味スル。故ニ〔A〕カラ $\{s\}$ ノスベテノ既約表現ハ $1, \{s\}, \cdots\cdots, \{s\}^{m}$ ノ中カラ得ラレルカラ，同値デナイモノハ高々 $1+n+\cdots\cdots+n^{m}=N$ 箇シカナイ。

s ハ $\mathfrak{h}$ ノ任意ノ元トスルト，之ノコトハ s ノ order ハ高々 N ナルコトヲ示ス。

故ニ Burnside ノ定理（全上 p. 398）ニ帰着サレル。

2

〔C〕ハ又 Van. Kampen: "Almost periodic functions and compact groups" Annals of Math. 37. (1936) (K) ト関係ガアル。

〔C〕ヲイヒカヘレバ

〔C′〕「Separabel compact group $\mathfrak{g}$ ノ有限箇ノ連続既約表現 $\mathfrak{D}^{(1)}, \cdots\cdots \mathfrak{D}^{(r)}$ ニ対シテ $\mathfrak{D}^{(i)}(S)=E$ $(i=1, \cdots\cdots r)$ ナラバ $S=1$ トナルナラバ，$\mathfrak{g}$ ノスベテノ連続

既約表現ハ $\mathfrak{D}^{(i)}$ 及ビ $\overline{\mathfrak{D}}^{(i)}$ ノ巾ノ Kronecker 積ノ因子トシテ得ラレル。』

即チ $\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D}^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{D}^{(r)} \end{pmatrix}$ ト考ヘレバヨイノデアル。

之レヲ一般ニシテ

〔C″〕 (K. §IV, Theo 1. Cor.).『separabel compact group $\mathfrak{G}$ ノスベテノ連続既約表現ハ，$\mathfrak{G}$ ノ既約表現ノアル集リ $\mathfrak{D}^{(1)}, \mathfrak{D}^{(2)}, \cdots\cdots$ ガアッテ、$\mathfrak{D}^{(i)}(S) = E$ ナラ $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$ $S = 1$ トナル時ハ，$\mathfrak{D}^{(1)}, \mathfrak{D}^{(2)}, \cdots\cdots, \overline{\mathfrak{D}}^{(1)}, \overline{\mathfrak{D}}^{(2)}, \cdots\cdots$ ノ巾ノ Kronecker 積ノ因子トシテ含マレル。』

（証明） $\mathfrak{D}^{(1)}(S) = E, \cdots\cdots, \mathfrak{D}^{(n)}(S) = E$ ナル S ノ全体ノナス closed invariant subgroup ヲ $\mathfrak{N}_n$ トスルト $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_n$ ハ〔C′〕ノ性質ヲ有ス。$\mathfrak{G}$ ノ compact ナルコトカラ

1 ノ任意ノ近傍 $\mathfrak{U}$ ヲトルト $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{N}_n$, $n > n_0$ ナル n_0 ガアルカラ、今任意ノ $\mathfrak{G}$ ノ上ノ連続函数 $f(S)$ ニ對シテ $|f(x) - f(xy)| < \varepsilon$, $y \in \mathfrak{U} = \mathfrak{U}$ ヲトルト

$$f_n(S) = \underset{t \in \mathfrak{N}_n}{M} f(St) \text{ ヲ作レバ} \qquad (\text{K. §X})$$

(イ) $|f(S) - f_n(S)| < \varepsilon$ トナル。

$f_n(S)$ ハ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_n$ ノ連続函数ナルニヨリ〔C′〕カラ

(ロ) $\left| f_n(S) - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i D^{*(i)}_{\rho\sigma}(S) \right| < \varepsilon$ ナル $\mathfrak{D}^{*(i)}$ ($\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_n$ ノ

既約表現，即チ $\vartheta^{(1)}, \cdots\cdots, \vartheta^{(n)}, \overline{\vartheta}^{(1)}, \cdots\cdots \overline{\vartheta}^{(n)}$ ノ中ノ Kronecker 積ノ因子）ガアル。(イ)(ロ)ヲ組合セテ〔C〕ノ証明ト同様ニ〔C″〕ガ証明サレル。——

（以上ノ証明中一般論ハ compact group ニオケル mean value ノ存在ト同値デナイ既約表現間ノ直交性丈ヲ用ヒタ丈デアル。）

Neumann, Kampen ハ abelien group ノ Character group ニ対シテ compact group ノ凡テノ連続既約表現全体 Γ ノ中デ

$\Gamma \ni \vartheta$ ノ逆ニ對應シテ $\overline{\vartheta}$, $\vartheta_1 \times \vartheta_2$ ノ既約因子全体ヲ Character ノ積ニ對應シテ取ルコトニシテ Character group ノ Subgroup ニ對應シテ Modul ヲ定義シタ。

Def.『Γ ノ Modul Δ トハ Γ ノ subset デ

$\Delta \ni \vartheta$ ナラ $\Delta \ni \overline{\vartheta}$, $\Delta \ni \vartheta_1, \vartheta_2$ ナラ $\vartheta_1 \times \vartheta_2$ ノ既約因子ヱ $\in \Delta$ ヲ満足スルモノヲイフ。』

特ニ Δ ガ $\vartheta^{(1)} \vartheta^{(2)}, \cdots\cdots, \overline{\vartheta}^{(1)}, \overline{\vartheta}^{(2)}, \cdots\cdots$ ノ中ノ Kronecker 積ノ因子ノ全体トシテ得ラレルトキニ $\Delta(\vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \cdots\cdots)$ トカキ "erzeugen" サレルトイフ。〔C′〕ヲイヒカヘレバ

〔D〕『compact group $\mathfrak{G}$ ガ unitary group ノ Subgroup ナルタメノ必要充分條件ハ Γ ガ有限個ノ "Erzeugende" ガアルコトデアル』

又〔C″〕カラ（K. § VIII）

〔E〕『sep. compact group $\mathfrak{G}$ ノ closed invariant subgroup $\mathfrak{N}$ ト Γ ノ modul Δ トハ

$\mathfrak{N}$ ヲ與ヘタ時ニハ $\mathfrak{N} \ni s$ ニ對シテ $\mathfrak{O}(s)=E$ トナル

$\mathfrak{O}$ ノ全体トシテ Δ ヲ,

Δ ヲ與ヘタ時ニハ $\Delta \ni \mathfrak{O}$ ニ對シテ $\mathfrak{O}(s)=E$ トナル

s ノ全体トシテ $\mathfrak{N}$ ヲ

對應サレルト可逆的ニ一對一ニ對應スル』

compact abeliengroup ノ構造ガソノ character group カラワカッタ樣ニ sep. compact group $\mathfrak{G}$ ノ構造モソノ既約表現全体 Γ カラ知ルコトガ出來ル。

character ノ order ガ有限ナルコトニ對應シテ A. Weil ノ定理カラ $\Gamma \ni \mathfrak{O}$ ガ代數方程式ヲ滿足スルコトガ對應スル。明ニ Γ ノスベテノ finite order ノ $\mathfrak{O}$ 全体ハ Γ ノ modul Γ_0 ヲナス。

〔F〕『$\mathfrak{G}$ ガ zero dimensional ナルコトト $\Gamma=\Gamma_0$ トハ對等デアル』

（証明） $\Gamma=\Gamma_0$ ナラ $\mathfrak{G} \ni a, b$, $a \neq b$ ナラ $\mathfrak{O}(a) \neq \mathfrak{O}(b)$ ナル $\mathfrak{O} \in \Gamma$ アリ。

$\mathfrak{O}(s)=E$ ナル s ノ全体ヲ $\mathfrak{N}$ トスレバ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ハ有限群トナルカラ $\mathfrak{N}$ ハ open且 closed トナル。

故ニ a, b ハ異ナル component ニ入ル。

逆ニ $\mathfrak{G}$ ガ zero-dimensional ナラ $\mathfrak{N}_\nu \to 1$ ナル open且 closed ナ invariant subgroup $\mathfrak{N}_\nu$ ガアル。$\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_\nu$ ハ有限群ナル故既約表現ハ finite order デアル。

トコロガ〔C″〕ノ証明ト同様ニソレデスベテノ連続既約表現ヲツクシテヰル。故ニ $\Gamma=\Gamma_0$,

同様ニ

(F′) 『$\mathfrak{G}$ ガ connected ナルコトト $\Gamma_0=1$ ナルコトトハ對當デアル』

(F″) 『$\mathfrak{G}$ ガ単純群ナルコト. $\Gamma=(\mathfrak{a})$, ($\mathfrak{a}$ ハ Γ ノ 1 デナイ勝手ノ元) トハ對當デアル。又ハ $\mathfrak{G}$ ノスベテノ連続既約表現ガ faithful デアルコトト對當デアル』

例.○ $\breve{\mathfrak{U}}_n$ ノスベテノ一次連続既約表現ハ

$$\breve{\mathfrak{U}}_n \longrightarrow |\breve{\mathfrak{U}}_n|^e, \quad (e=0,\pm 1,\text{-----})$$

デアル。(Weyl I. p.26, P.128). コノ Modul Δ ニ對應スル invariant subgroup 群 $\breve{\mathfrak{U}}_n$ ノ commutatorgroup ハ unimodular unitary group $\breve{\mathfrak{U}}_n^0$ デアル。

○ $\breve{\mathfrak{U}}_n$ ノ centre $\mathfrak{z}$ ハ diagonal unitary matrix ノ全体デアル。

ソレニ對應スル Modul Δ ハ $|\breve{\mathfrak{U}}_n|^{-r}\times\breve{\mathfrak{U}}_n^{nr}$ ノ既約因子ノ全体デアル。

$\breve{\mathfrak{U}}_n=\breve{\mathfrak{U}}_n^0\cup\mathfrak{z}$, ナル故 $\breve{\mathfrak{U}}_n^0\cap\mathfrak{z}=\mathfrak{z}_0$ トスレバ

$$\breve{\mathfrak{U}}_n/\mathfrak{z}\cong\breve{\mathfrak{U}}_n^0/\mathfrak{z}_0$$

∴ $\breve{\mathfrak{U}}_n^0/\mathfrak{z}_0$ ノスベテノ連続既約表現ハ $|\breve{\mathfrak{U}}_n^0|^{-r}\times\breve{\mathfrak{U}}_n^{nr}$ ノ因子トナル。

signature デイヘバ (W. I. p.132)

$$(f_1,\text{-----},f_n),\quad f_1\geqq f_2\geqq\text{-----}\geqq f_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = 0 \text{ トナル。}$$

○ 特ニ $n=2$ ノ時ハ $(f, -f)$ デアル．又ハ $|\mathfrak{U}_n^0|=1$ カラ $(2f, 0)$ トイッテモヨイ。即チ $\mathfrak{U}_2^0/\mathfrak{Z}_0$ ノスベテノ連続既約表現ハ covariant symmetry tensor ニヨル表現デアル。(W. II. p. 151)

○ $\mathfrak{U}_2^0/\mathfrak{Z}_0$ ハ単純デアルコトガワカル。$\mathfrak{U}_2 \ni s=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ トシテ covariantvector (x, y) ヲトレバ $2r$ 階 cov. symmetry tensor space ノ base ハ $(x^{2r}, x^{2r-1}y, \cdots\cdots, y^{2r})$ ナル $2r+1$ 次元ノ space トナル。

$\mathfrak{D}=\langle P(2f, 0)\rangle$ (W. I. p. 130) ガ $\mathfrak{D}(s)=E$ トナルナラバ

$$x^{2r}=(x')^{2r}=(\alpha x+\beta y)^{2r} \quad \therefore\ \alpha^{2r}=1,\ \beta=0$$

$$y^{2r}=(y')^{2r}=(\gamma x+\delta y)^{2r} \quad \therefore\ \gamma=0,\ \delta^{2r}=1$$

$$x^{2r-1}y=(x')^{2r-1}\cdot y'=\alpha^{2r-1}\delta x^{2r-1}\cdot y \quad \therefore\ \alpha=\delta$$

$$\therefore\ s \in \mathfrak{Z} \text{ トナル。}$$

即チ F'' カラ $\mathfrak{U}_2^0/\mathfrak{Z}_0$ ハ単純デアル。

3.

有限群 $\mathfrak{G}$ トソノ subgroup $\mathfrak{H}$ トニ對シテ

$$\mathfrak{G}=\rho_1\mathfrak{H}+\rho_2\mathfrak{H}+\cdots\cdots+\rho_r\mathfrak{H}$$

ト分解シテ

$$\sigma \to \begin{pmatrix} \rho_1 \mathfrak{h}, \cdots\cdots, \rho_\nu \mathfrak{h} \\ \sigma\rho_1 \mathfrak{h}, \cdots\cdots, \rho_\nu \mathfrak{h} \end{pmatrix}$$

ナルGノ表現ヲ考ヘル時ニ，$\mathfrak{h}$ ガ invariant subgroup ノ時ニ對應スル一般ノ compact group ノ場合ガ［C″］デ（更ニ叮寧ニ K ニ）與ヘラレテキル。

ソレニ對應シテ $\mathfrak{h}$ ガ invariant デナイ時ニ對應スル理論ガ Weyl: "Harmonics on homogeneous manifolds," Annals of Math. 35 (1934)（W. III）デ與ヘラレテキル。ソレハ後ニ見ル樣ニ球函數ノ理論ノ一般化デアル。コヽデハ Neumann ノ理論（N）カラ導イテミル。

抽象群 $\mathfrak{G}$ トソレヲ transitive transformation group トシテモツ集合 $\mathfrak{M}$ トガ與ヘラレテキルトスル $\mathfrak{M}$ ノ函數 $f(P)$ カラ P_0 ヲ固定シテ $f(s) = f(sP_0)$ ト定義シテ $\mathfrak{G}$ ノ函數ヲ作ル。$tP_0 = P_0$ ナル t ノ全体ヲ $\mathfrak{h}$ トスルト、$\mathfrak{G}$ ノ函數 $f(s)$ ガ $\mathfrak{M}$ ノ函數カラ導カレルタメノ條件ハ

$$f(st) = f(s), \quad t \in \mathfrak{h}$$

ナルコトデアル。

$\mathfrak{M}$ ノ函數 $f(P)$ ガ almost periodic トハ $f(sP) = f(P)^s$ ガ s ニ關シテ一樣收斂ノ topology デ totally bounded ナルコトヽスレバ $f(s) = f(sP_0)$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ上デ a.p. ナルコトヽ同ジ定義ニナル。

$$f(st) = f(s), \quad t \in \mathfrak{h}$$

ナル a. p. function ノ全体ヲ $\gamma(\mathfrak{h}_y)$ ト書クコトニスル。

初メニ $\mathfrak{G}$ ノ n 次ノ unitary 表現 $\mathfrak{D}$ ノ表現加群ニツイテシラベテミル。

今 $\gamma(\mathfrak{h}_y)$ ノ元ヨリナル $\mathfrak{D}$ ノ表現加群 $\mathfrak{m}$，ソノ base ヲ $f_1(s), \cdots\cdots, f_n(s)$ トスル．即チ

$$\begin{pmatrix} f_1(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} f_1(ts) \\ \vdots \\ f_n(ts) \end{pmatrix} = \mathfrak{D}(t)\begin{pmatrix} f_1(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{pmatrix}$$

トスル。

表現 $\mathfrak{D}$ ヲ與フル $\gamma(\mathfrak{h}_y)$ ノ表現加群 $\mathfrak{m}$ ノ全体ヲ $\{\mathfrak{m}\}_{\mathfrak{D}}$ トスル。

$\{\mathfrak{m}\}_{\mathfrak{D}}$ カラニツ $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ ヲトリ $\mathfrak{D}$ ヲ得ル base ヲ

$$(f_1(s), \cdots\cdots, f_n(s)), \quad (f'_1(s), \cdots\cdots, f'_n(s))$$

トスルト

$\alpha\mathfrak{m} + \beta\mathfrak{m}'$ ヲ $(\alpha f_1(s) + \beta f'_1(s), \cdots\cdots, \alpha f_n(s) + \beta f'_n(s))$ ノ張ル表現加群トスレバ，又 $\{\mathfrak{m}\}_{\mathfrak{D}}$ ニ屬スル。

カクシテ $\{\mathfrak{m}\}_{\mathfrak{D}}$ ハ Modul トナッタ。（但シ 0 ヲ附ケ加ヘテ）

$$\begin{pmatrix} f_1(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{pmatrix} = \mathfrak{D}(s)\begin{pmatrix} f_1(1) \\ \vdots \\ f_n(1) \end{pmatrix}$$

カラ $(f_1(1), \cdots\cdots, f_n(1))$ ハ 0-vector ニハナラナイ。
故ニ

$$\{m\}_{\mathfrak{O}} \ni m = (f_1(s), \cdots\cdots, f_n(s)) \longleftrightarrow (f_1(1), \cdots\cdots, f_n(1)) \in V_n(k)$$

ナル complex number ノ n 次ノ vector トノ對應ハ isomorphic トナル。

故ニソノ張ル linear space ヲ M トスルト

complex Euclidespace $E^{(n)} = M + M'$ ト直交セル M, M' ニ分ケテ，M ヲ r 次元トスルト M ノ中ニ $(1, 0, \cdots\cdots 0), \cdots\cdots (\underbrace{0, \cdots\cdots 0}_{r-1\text{箇}}, 1, 0 \cdots\cdots 0)$ ナル座標軸ヲ取ッテ unitary orthog. transf. P デ座標変換ヲ行ヘバ

$$\begin{pmatrix} f_1'(s) \\ \vdots \\ f_n'(s) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} f_1(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{pmatrix},$$

ト m ノ base ヲトリカヘレバ，ソレハ $\mathfrak{O}' = P \mathfrak{O} P^{-1}$ ナル表現ヲ與ヘル。

$\{m\}_{\mathfrak{O}}$ ノ中カラ

$$m^{(i)} = (f_1'^{(i)}(s), \cdots\cdots, f_n'^{(i)}(s)), \quad i = 1, \cdots\cdots, r$$

$$(f_1'^{(i)}(1), \cdots\cdots, f_n'^{(i)}(s)) = (\underbrace{0, \cdots\cdots 0}_{i\text{箇}}, 1, 0 \cdots 0)$$

ナル表現加群 $m^{(1)} \cdots\cdots m^{(r)}$ ヲ取レコトガ出来ル。之レガ丁度 $\{m\}_{\mathfrak{O}}$ ノ base トナル。

ソウスレバ

$$\begin{pmatrix} f_1'^{(i)}(s) \\ \vdots \\ f_n'^{(i)}(s) \end{pmatrix} = \mathfrak{D}'(s) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D'_{1i}(s) \\ \vdots \\ D'_{ni}(s) \end{pmatrix}$$

即チ $m^{(i)}$ ハ $\mathfrak{D}'$ ノ第 i 列ヨリ作ル加群トナル。

〔定義〕 $\mathfrak{G}$ ノ unitary (irreducible) rep. $\mathfrak{D}$ = 對シテ上ノ如ク $\mathfrak{D}'$ ヲ同値＝取リ $\mathfrak{D}'$ ヲ $\gamma(\mathfrak{h})$ ＝對シテ normal ト呼ブコトニスル。

〔G〕「$\mathfrak{G}$ ノ normal unitary (irreducible) rep. $\mathfrak{D}$ ＝對シテハ，ソノ組成分子 $D_{ij}(s)$, $i=1,\cdots\cdots,n$; $j=1,\cdots\cdots,r(\mathfrak{D})$ ハ $\gamma(\mathfrak{h})$ ＝屬スル。且ツ $m^{(i)}-(D_{1i}(s),\cdots\cdots,D_{ni}(s))$ $(i=1,\cdots\cdots,r)$ ハ $\{m\}_{\mathfrak{D}}$ ノ base トスル。

$r(\mathfrak{D})$ ハ又 $\mathfrak{D}$ ヲ $\mathfrak{h}$ ノ表現トシタ時＝ identical rep. ノ現ハレル回数デアル。」

$r(\mathfrak{D})$ ＝関スル後半丈詳明スレバヨイ。

$\mathfrak{D}$ ヲ $\gamma(\mathfrak{h})$ ＝對シテ normal トスルト $\mathfrak{D}(st)=\mathfrak{D}(s)$; $\mathfrak{D}(t)$ カラ $t\in\mathfrak{h}$ トスレバ $D_{ij}(st)=D_{ij}(s)$ ($i=1,\cdots,n$, $j=1,\cdots\cdots,r$) ヲ用ヒレバ

$$\mathfrak{D}(t)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & * \\ & & 1 & \\ \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{0}_{r}} & \end{array}\right)$$

即チ $\mathfrak{D}(t)$ ハ unitary ナル故

$$\mathfrak{D}(t)=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & \mathfrak{D}'(t) \end{pmatrix}$$

ト分割サレル。故ニ $\mathfrak{D}(t)$, $t \in \mathfrak{G}$ ハ少トクモ $r(\mathfrak{D})$ 回 identical rep. ヲ含ム。

逆ニ s 回含ムトスレバ $\mathfrak{D} \sim \mathfrak{D}^0$ ヲトリ

$$\mathfrak{D}^0(t) = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & \mathfrak{D}_1^0(t) \end{pmatrix}$$ ナラシムレバ

$m^{(1)} = (D_{11}^0(s), \cdots\cdots, D_{n1}^0(s)), \cdots\cdots, m^{(s)} = (D_{1s}^0(s), \cdots D_{ns}^0)$

ハ $\{m\}_{\mathfrak{D}}$ ノ一次独立ノ表現加群ニナル。$\therefore s \leqq r(\mathfrak{D})$. —

v. Neumann (N) ノ考ヘニヨリ

Def. a.p. function ノ集リ γ ガ l-closed family ヲナストハ

1) $\gamma \ni f, g$ ナラ $\gamma \ni \alpha f + \beta g$. α, β ハ Complex number.

2) $\gamma \ni f(x)$ ナラ $\gamma \ni f(ax)$.

3) $\gamma \ni f_n$, f_n ガ uniformly ニ f ニ conv. スレバ $f \in \gamma$.

明カニ $\gamma(\mathfrak{G})$ ハ l-closed family トナル。

$\gamma(\mathfrak{G})$ ガ與ヘラレル時ニ

[H] $\mathfrak{G}$ ノスベテノ unitary irreducible rep. ヲ normal ニ直シテオク。ソレヲ $\mathfrak{D}^{(1)} \cdots\cdots$ トス。

$\gamma(\mathfrak{G}) \ni D_{\rho\sigma}^{(i)}(s)$, $(\rho = 1, \cdots\cdots, s_i, \sigma = 1, \cdots\cdots r(\mathfrak{D}^{(i)}))$

(s_i ハ $\mathfrak{D}^{(i)}$ ノ次数) ノ全体 $\{D\}_{\gamma(\mathfrak{G})}$ ハ $\gamma(\mathfrak{G})$ ノ完全直交系ヲナス。

即チ $f(s) \in \gamma(\mathfrak{G})$ トスレバ

$$\alpha^{(i)}_{\rho\sigma} = \underset{s}{M}\, f(s)\, D^{(i)}_{\rho\sigma}(s), \quad (i=1,2,\cdots\cdots, \rho=1,\cdots,s_i, \; \sigma=1,\cdots,\gamma(\mathfrak{D}^{(i)}))$$

トスレバ

$$\underset{S}{M}\, f(s)\, \overline{f(s)} = \sum_{i,\rho,\sigma} \left| \alpha^{(i)}_{\rho\sigma} \right|^2$$

ナル Parseval's equation ガ成立スル。

又 Approximationtheorem モ成立スル. 即テ $f(s) \in \gamma(\mathfrak{h}_y)$ ニ對シテ

$$\left| f(s) - \sum a.\, D^{(i)}_{\rho\sigma}(s) \right| < \varepsilon$$

ニナルヤウニ有限箇ノ $D^{(i)}_{\rho\sigma}(s)$ ヲ $\{D\}_{\gamma(\mathfrak{h}_y)}$ カラ取リ出スコトガ出來ル。』

(証明) (N. p. 416) ト同様ニ

(i) $f \in \gamma(\mathfrak{M})$ ナラ $g \times f \in \gamma(\mathfrak{M})$ トナル。

(ii) $D_{\rho\sigma}(s) \in \gamma(\mathfrak{M})$ ナラ $D_{\rho'\sigma}(s) \in \gamma(\mathfrak{M})$

(iii) $f(s) \in \gamma(\mathfrak{M})$ ヲスベテノ a.p. function ニ對スル完全直交系 $D^{(i)}_{\rho\sigma}$ ニヨリ展開スルトキ

$$\alpha^{(i)}_{\rho\sigma} = \underset{s}{M}\, f(s)\, D^{(i)}_{\rho\sigma}(s) \neq 0 \text{ ナラ}$$

$$D^{(i)}_{\rho\sigma}(s) \in \{D\}_{\gamma(\mathfrak{h}_y)} \text{ トナル。}$$

コヽニ $\gamma(\mathfrak{M})$ ガ單ナル l-closed family デナイ点ガアラハレテ來ル。即チ

$\alpha^{(i)}_{\rho\sigma} \neq 0$ トスレバ

$$D^{(i)}_{\rho'\rho} \times f(s) = \sum_{\tau=1}^{s_i} \alpha_{\rho\tau} D^{(i)}_{\rho'\tau}(s) \in \gamma(\mathfrak{M}), \quad \rho'=1,\cdots,n$$

$$\therefore \left(\sum_{\tau}\alpha_{\rho\tau}D^{(i)}_{1\tau}(s), \cdots\cdots, \sum_{\tau}\alpha_{\rho\tau}D^{(i)}_{n\tau}(s)\right) = m$$ ハ

$\{m\}_{\mathfrak{D}}$ ニ屬シ丁度コノ base ガ表現 $\mathfrak{D}^{(i)}$ ヲ與ヘルノ假定ニヨリ

$$m^{(i)} = (D_{1i}(s), \cdots\cdots, D_{ni}(s))\ (i = 1, \cdots\cdots, r(\mathfrak{D}^{(i)}))$$

ガ $\{m\}_{\mathfrak{D}}$ ノ base トナルカラ m ハソノ一次結合トシテアラハサレル。故ニ $\alpha_{\rho\tau} = 0,\ \tau > r(\mathfrak{D}^{(i)})$ トナル。

$$\therefore\ \alpha^{(i)}_{\rho\sigma} \neq 0 \text{ ナラ } \sigma \leqq r(\mathfrak{D}^{(i)}),$$

即チ $D^{(i)}_{\rho\sigma}(s) \in \{D\}_{r(\mathfrak{g})}$

トナル。

即チスベテノ $D^{(i)}_{\rho\sigma}(s)$ ガ Parseval's eq. ノナリタツコトカラ $\{D\}_{r(\mathfrak{g})}$ 犬ヲ Parseval's eq. ガ成立スル。

Approximation theorem ハ (N. p. 475) カラ

$$|f(s) - \phi \times g \times f(s)| < \varepsilon, \quad \phi \times \phi = \phi$$

ニトレル。(i)・(iii) カラ $\phi \times g \times f(s)$ ハ $\{D\}_{r(\mathfrak{g})}$ ノ linear combination トナル。故ニ App. theo. ハ成立スル。

特ニ $\mathfrak{G}$ ニ topology ノ入ッテ compact ナルトキハ $\mathfrak{g}$ closed in $\mathfrak{G}$ デアル。故ニ $\mathfrak{M}$ ニ top. ヲ $\mathfrak{G}$ ノ $\mathfrak{g}$ ニヨル Nebengruppe ニヨル Zerlegungsraum トシテ導入スレバ $\mathfrak{M}$ ハ又 compact トナリ, $\mathfrak{M}$ ノ上ノ連続函

数ハ a. p. function トナル。$\gamma(\mathfrak{M})$ ノカハリニ，スベテノ $\mathfrak{M}$ ノ上ノ連続函数 $\bar{\gamma}(\mathfrak{M})$ ヲ考ヘテモ全ク同様ニ〔H〕ハ成立スル。

$\bar{\gamma}(\mathfrak{M})$ ノ表現加群ニヨッテ生ズルスベテノ $\mathfrak{G}$ ノ連続既約表現ヲ $\mathfrak{D}^{(1)}, \mathfrak{D}^{(2)}, \cdots\cdots$ ノ全体 $\{\mathfrak{D}\}_{\bar{\gamma}(\mathfrak{M})}$ ハ〔G〕ニヨリ $\mathfrak{h}_y$ ノ identical rep. デ induce サレタ表現デアル。

コレハ一般ニ modul ヲ作ラナイ。N. Theo. 33 ニ相当シテ

〔I〕『$\{\mathfrak{D}\}_{\bar{\gamma}(\mathfrak{M})}$ デ"erzeugen"サレタ modul Δ ハ $\mathfrak{h}_y$ ニ含マレル maximal invariant subgroup $\mathfrak{N}$ ト〔E〕ノ意味デ對應スル。』

（証明）ソレハ $\{\mathfrak{D}\}_{\bar{\gamma}(\mathfrak{M})} \ni \mathfrak{D}$ ニ対シテ $\mathfrak{D}(a)=E$ トナル a ノ全体デアル。

ソレハ〔G〕ノ後半ノ証明同様 $D^{(i)}_{\rho\sigma}(a)=D^{(i)}_{\rho\sigma}(1)$，$D^{(i)}_{\rho\sigma}(s) \in \{D\}_{\bar{\gamma}(\mathfrak{M})}$ トナルカラ Approximation theorem カラ

スベテノ $\bar{\gamma}(\mathfrak{M}) \ni f(s)$ ニツイテ $f(a)=f(1)$ トナル。故ニ $a \in \mathfrak{h}_y$ トナル。

∴ a ハ $\mathfrak{h}_y$ ニ含マレル invariant subgroup $\mathfrak{N}$ ニ入ル。逆モ眞。———

4.

3ノ Weyl ノ理論ノ一番手近イ應用ハ球函数ヘノ應用

デアル。

$\mathfrak{G}$ ヲ n 次ノ real orthogonal group O_n トシ。
$\mathfrak{M}$ ヲ n-dim. spere:

$$x_1^2 + \cdots\cdots + x_m^2 = 1$$

トスル。

$\mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}$ ヘノ topology ノ入レ方ハ普通ニ入レレバ3ノ終リノ入レ方ト一致スル。又 $\mathfrak{M}$ ノ上ノ函数カラ作ッタ $f(s) = f(sP_0)$ ノ $\mathfrak{G}$ ノ上ノ平均値ト $\mathfrak{M}$ ノ上ノ普通ノ積分ニヨル平均値ト一致スル。

一点 $P_0 = (1, 0, \cdots\cdots, 0)$ トスレバ

$$\mathfrak{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0\,0\,0 \\ 0 & \boxed{O_{n-1}} \end{pmatrix} \cong O_{n-1}$$

デアル。

今, $x_1 \cdots\cdots x_n$ ノ m 次 homogeneous polynomial 全体ヲ $\mathfrak{M}$ 上デ考ヘルト O_n デ invariant ナ space $\mathfrak{m}_m$ ヲ作ル。$(m = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$

先ヅ補助定理トシテ

『$f(x_1 \cdots\cdots x_n)$ ナル polynomial ガ $\mathfrak{M}$ 上デ恒ニ 0 ナル値ヲトレバ

$$f(x_1 \cdots\cdots x_n) = (x_1^2 + \cdots\cdots + x_n^2 - 1)\, g(x_1 \cdots\cdots x_n)$$

トナル。

特ニ f ガ homogeneous ナラ $f = 0$ トナル』

何トナレバ f ガ先ヅ homogeneous ナラバ $r^2 = x_1^2 + \cdots$ $\cdots\cdots + x_n^2$ トスレバ

$$f(x_1,\cdots x_n)=r^n f\left(\frac{x_1}{r},\cdots,\frac{x_n}{r}\right)=0 \text{ カラ } f=0$$

トナル。

f ガ homogeneous デナイ時ニハ

$$f\equiv f_1+f_2 \quad (\mathrm{mod}\ x_1^2+\cdots+x_n^2-1)$$

f_1, f_2 ハ夫々 m, $m-1$ 次ノ homogeneous polynomial ニ出來ル。

今, $f_1+f_2=f_0=0$ ヲ証明スレバヨイ。$f_0\neq 0$ トスルト

$$0=f_0\left(\frac{x_1}{r_1}\cdots\cdots,\frac{x_n}{r}\right)=r^{-m}f_1(x_1\cdots x_m)+r^{(m-1)}f_2(x_1\cdots\cdots x_m)$$

$$\therefore\quad r=\frac{f_1(x_1\cdots x_n)}{f_2(x_1\cdots x_n)}$$ トナリ矛盾ヲ生ズル。――

『故ニ $\mathfrak{M}_m$ ノ rank ハ ${}_n\mathrm{H}_m={}_{n+m-1}\mathrm{C}_{m-1}=h_m$ トナル。』

『高々 $m-1$ 次ノ polynomial $f(x_1\cdots\cdots x_n)$ 全体ノ作ル modul ヲ S_{m-1} トスルト

$$S_{m-1}\cap\mathfrak{M}_m=\mathfrak{M}_{m-2} \text{ on } \mathfrak{M}$$

トナル。』

何トナレバ $f(x_1\cdots\cdots x_n)=g(x_1\cdots\cdots x_n)$, $f\in\mathfrak{M}_m$, $g\in S_{m-1}$ トスレバ

$$f-g=(x_1^2+\cdots\cdots+x_n^2-1)\cdot h.$$

$h=h_1+h_2$, $h_1\in\mathfrak{M}_{m-2}$, $h_2\in S_{m-3}$ ト分解スレバ

$$f=(x_1^2+\cdots\cdots+x_n^2)h_1$$

トナル。

$\therefore\ f\in\mathfrak{M}_{m-2}$ ＝ナル。——————

$\mathfrak{M}_1$ ＝ヨル表現ハ O_n ソノマヽデアル。故＝ $\mathfrak{M}_1$ ノ元トノトハ直交スル。

以下 S_{m-1} ノ中＝互＝直交スル base ヲトルトキ—

$S_m=(S_{m-1},\mathfrak{M}_m)$ ノ中＝更＝ S_{m-1} ノ base ヲソノマヽトリ，ソレ＝直交シテ S_m ノ base ヲ作ルトキ

$$\text{rank}\ S_m=\text{rank}\ S_{n-1}+(h_m-h_{m-2})$$

故＝ S_m 中 $\mathfrak{M}_m$ ＝含マレ S_{m-1} ＝直交スル (h_m-h_{m-2}) 次ノ lin. sub space $\mathfrak{M}'_m$ ヲ得ル。S_m, S_{m-1} ハ O_n デ invariant ナル故 $\mathfrak{M}'_m$ ハ又 invariant space トナル。

〔J〕『$\mathfrak{M}'_m$ ノ base $f_1^{(m)}(x_1\cdots\cdots x_n),\cdots\cdots,f_{l_m}^{(m)}(x_1\cdots\cdots x_m)$

$(l_m=h_m-h_{m-2},\ m=0,1,\cdots\cdots)$ ハ球面上ノ連続函数全体ノ系＝対シテ完全直交系ヲナス』

（証明）　球面上ノ任意ノ連続函数 $f(S)$ ハ

$$|f-p(x_1\cdots\cdots x_n)|<\varepsilon$$

（Weierstrass ノ近似定理）トナル polynomial p ガ存在スル。

故＝〔C〕ノ証明ト同様デアル。

更＝

〔K〕『$\mathfrak{M}'_m$ $(m=0,1\text{-----})$ ニヨル O_n ノ表現ハ既約表現デアル。』

即チ〔J〕〔K〕ニヨリ〔I〕ニ示サレタスベテノ $\{\mathfrak{D}\}_{\bar{\gamma}(m)}$ ト $\{D\}_{\bar{\gamma}(m)}$ トガ今ノ場合ニ完全ニモトマッタ譯デアル。又 $r(\mathfrak{D}^{(i)})=1$ カ $r\neq 0$ ナラ成立スルコトニナル。

〔K〕ハ O_n ノ精シイ理論ヲ用フレバ簡単ニ得ラレルが、コヽニ初等的ニ証明ヲ與ヘヨウ。

先ヅ

『polynomial $f(x_1\text{-----}x_n)$ ガ $(x'_1\text{-----}x'_n)=O_n(x_1\text{-----}x_n)$ ナル置換ヲシテモカハラナケレバ，即チ f ガ O_n ノ vector invariant ナラバ

$$f=F(x_1^2+\text{-----}+x_n^2)$$

トナル。』

ソレニハ f ガ homogeneous ノトキダケ考ヘレバ充分デアル。

$f(x_1\text{-----}x_n)=f(x'_1\text{-----}x'_n)$ カラ f ハ $\mathfrak{M}$ 上デ const. デアル。

$$故ニ\quad f(x_1\text{-----}x_n)=r^m f\left(\frac{x_1}{r}\text{-----}\frac{x_n}{r}\right)=r^m\times \text{const.}$$

f ハ poly. ナル故 $m=2s$，即チ $f=(x_1^2+\text{-----}+x_n^2)^s$ トナル。

『$\mathfrak{G}$ ノ unitary rep. $\mathfrak{D}$ ガ $\gamma(\mathfrak{h})$ ノ表現加群ヲ有スルトキ，$\mathfrak{D}$ ガ $\mathfrak{h}$ ノ表現トシテ identical rep. ヲ只一度シカ含マナケレバ $\mathfrak{D}$ ハ既約デアル。』

何トナレバ，$\mathfrak{D}$ガ可約ナラ

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} \mathfrak{D}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathfrak{D}_r \end{pmatrix}$$

トナルトスレバ $\mathfrak{D}_1 \cdots\cdots \mathfrak{D}_r$ モ $\Upsilon(h_y)$ ノ表現加群ヲモツ。故ニ［G］カラ $\mathfrak{D}$ ヲ h_y ノ表現トミレバ ideutical rep. ヲ少クトモ r 回含マネバナラナイ。——

コノ Lemma ヲ用ヒテ $\mathfrak{m}'_m$ ニヨル表現 $\mathfrak{D}_m$ ヲ h_y ノ表現トミテ ideutical rep. ガ二ツナイコトヲイヘベヨイ。二ツアルトスレバ、ソノ表現加群ヲ $\{f\}$, $\{f'\}$ トスルト $f \cdot f'$ ハ一次独立デアル。

$x_1 = x_1 \quad (x'_2 \cdots\cdots x'_n) = O_{n-1}\,(x_2 \cdots\cdots x_n)$ ナル h_y ノ変換デカハラナイカラ

$$f(x_1 \cdots\cdots x_n) = f(x_1, x'_2 \cdots\cdots x'_n),$$
$$f'(x_1 \cdots\cdots x_n) = f'(x_1, x'_2 \cdots\cdots x'_n)$$

トナル。

又ハ $f = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i x_1^i g_i(x_2 \cdots\cdots x_n)$ トスレバ $g_i(x_2 \cdots\cdots x_n)$ ハ O_{n-1} ノ vector invariant トナル。故ニ

$$g_i(x_2 \cdots\cdots x_n) = g'_i\left((x_2^2 + \cdots\cdots + x_n^2)\right)$$
$$= g'_i\left((1 - x_1^2)\right) \quad \text{on } \mathfrak{M},$$

即チ　$f = \bar{f}(x_1)$ on $\mathfrak{M}$ トナル。

同様ニ　$f' = \bar{f}'(x_1)$ on $\mathfrak{M}$.

且ツ x_1 ノ poly. トシテ次数ハ丁度 m 次デアル。（何故ナラ $m-1$ 次以下ニナルト $S_{m-1} = \lambda f$. $\mathfrak{m}'_m \cap S_{m-1} = 0$ ニ

反スル)。

故ニ α, β ヲ適當ニトレバ。$\alpha f - \beta f' \in S_{m-1}$ ニ出來ル。$\alpha f - \beta f' \in \mathfrak{m}'_m$ カラ

$$\alpha f = \beta f'$$

コレハ f, f' ノ一次独立トナルコトニ反スル。———

普通ノ球函数ノ時ニハ $\mathfrak{m}'_m$ ハ harmonic function ノ中カラ エラブコトガ出來タ。コノコトハ一般ニ成立スル。

〔L〕『$\mathfrak{m}'_m$ ハ m 次ノ homogeneous polynomial 中 $\Delta f = 0$ トナル全体デアル』

(証明) $\Delta f = 0$ ヲ満足スル m 次ノ hom. poly ノ全体ヲ $\overline{\mathfrak{m}}_m$ トスル。

$\overline{\mathfrak{m}}_m$ ハ明カニ O_n- invariant space トナル。

明カニ $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}'_0$, $\mathfrak{m}'_1 = \overline{\mathfrak{m}}_1$ ナル故帰納法ヲ用ヒル。

今 $\overline{\mathfrak{m}}_r = \mathfrak{m}'_r$, $r \leqq m-1$ マデ成立スルトスル。
$\mathfrak{m}_m = \mathfrak{m}'_m + \mathfrak{m}_{m-2}$ ハ orthogonal ナ分解デアル。一方 $\overline{\mathfrak{m}}_m$ ニ属スル f ト $\mathfrak{m}_{m-2} = \overline{\mathfrak{m}}_{m-2} + \overline{\mathfrak{m}}_{m-4} + \cdots\cdots$ ニ属スル g トハ orthogonal ナルコトハ Gauss ノ定理ヲ用ヒテ $\Delta f = \Delta g = 0$ カラ普通ノ球函数ノトキト同ジデアル。

$\therefore$ $\overline{\mathfrak{m}}_m \subset \mathfrak{m}'_m$. シカモ $\overline{\mathfrak{m}}_m$ ハ O_n- invariant subspace デ $\mathfrak{m}'_m$ ハ irreducible ナル故 $\mathfrak{m}'_m = \overline{\mathfrak{m}}_m$ トナル。———

若シモ orthogonal group ノ詳シイ表現論ヲ用ヒルナラバ (W. I. p. 157)

〔M〕『$\mathfrak{M}'_m$ ハ P^0_m ノ irreducible subspace $P_0(m, 0, \cdots\cdots, 0)$ ニ等シイ』

（証明）$P_0(m, 0, \cdots\cdots, 0) = \sum_{\substack{v \equiv m(2) \\ 0 \leq v \leq m}} P^0_v \cap P_0(m, 0, \cdots 0)$

ナル故

一方 $\mathfrak{M}_m = \sum_{\substack{v \equiv m(2) \\ 0 \leq v \leq m}} \mathfrak{M}'_v$, ト $P_0(m, 0, \cdots\cdots 0) = \mathfrak{M}_m$

トカラ $m = 0, 1$ ノ時ハ明カニ〔M〕ハ成立スル故帰納法ニヨリ $P^0_v \cap P_0(m, 0, \cdots\cdots 0)$ ノ既約性カラ K ト独立ニ $\mathfrak{M}'_m$ ノ既約性ト〔M〕トガ得ラレル。————

以上ノスベテハ O_n ノカハリニ proper orthogonal group O^+_n ヲ用ヒテモヨイ。

特ニ $n = 3$ ノ場合ニハ

$P^0_m \cap P_0(m, 0, \cdots\cdots, 0)$ ハスベテノ O^+_n ノ連続既約表現ヲツクス。(W. I. p. 157, 164, Theo. 5.9. A)

コレハ W. II. p. 151 デ Character ヲ用ヒテ証明シタコトデアル。

シカシ $n > 3$ ノ時ニハ symmetric case 丈デハスベテノ O^+_n ノ連続既約表現ヲツクシテヰナイ。(W. I. p. 164).

故ニ

〔N〕『一般球函数 $\mathfrak{M}'_m = \overline{\mathfrak{M}}_m$ ニヨル表現ガスベテノ O^+_n ノ連続既約表現ヲツクスノハ $n = 3$ ノ場合ニ限リ、$n > 3$ ノ時ニハ他ニモ存在スル』

補 $n = 3$ ノ時ハ $O^+_n \cong \mathfrak{U}^0_2 / \mathfrak{Z}_0$ ヲ用ヒレバ $\mathfrak{M}'_m$ ノ

rank ハ $2H_m - 2H_{m-2} = 2m+1$ $(m = 0, 1, \cdots\cdots)$ ナル故、一方2ノ最後ニ $\mathfrak{U}_2^0/\mathfrak{Z}_0$ ノスベテノ連続既約表現ハ $1, 3, \cdots\cdots, 2l+1, \cdots\cdots$ 次ノ表現ガ1ツヅツアルコトヲ知ルカラ．此ノ方法デモ O_3^+ ノ時ニツクシテヰルコトガワカル。――――