796. Eigenwertproblem ノ一証明（續）

中野 秀五郎

§8. Normal operator ノ函數. J. v. Neumann ガ Über Funktion von Funktionaloperator (Annals of. Math. 32) ニテ bounded normal operator ノ有限個或ハ可附番個ノ函數ヲ define シタ。此処デハ其レトハ全然異ナル方法ニテ Massoperator ノ考ヘニテ高々可附番個ノ hypermaximal normal operator ノ函數ヲ define シテ見ル。

有限或ハ可附番個ノ hypermaximal normal

operator ヲ $N_1, N_2, \cdots\cdots$ トシ其ノ massoperator ヲ夫々 $E_1(\mathfrak{Z}_1)$, $E_2(\mathfrak{Z}_2)$, $\cdots\cdots$ トス。$\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \cdots\cdots$ ハ夫々 Gaussian plane 上ノ measurable set ヲ表スモノナルモ、此処ニテハ $\mathfrak{G}$ ニ無限遠点ヲ加ヘ $\mathfrak{G}$ ヲ Riemann 球ト考ヘル。然シテ有限或ハ無限個ノ Riemann 球 $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots\cdots$ 上ノ点ヲ夫々 z_1。$z_2, \cdots\cdots$ トシ $(z_1, z_2, \cdots\cdots)$ ナル点ノ全体即チ torus space $\mathfrak{T}$ ヲ考ヘ。$\mathfrak{T}$ ノ点集合ニ massoperator ヲ次ノ如ク define スル。

$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots\cdots$ 上ノ任意ノ円ヲ $C_1, C_2, \cdots\cdots$ トシ．$C(C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n, \mathfrak{G}_{n+1}, \mathfrak{G}_{n+2}, \cdots\cdots)$ ナル $\mathfrak{T}$ 上ノ点集合ヲ $\mathfrak{T}$ ノ円ト呼ブコトヽシ、此ノ如キ円ニハ $E(C) = E_1(C_1)E_2(C_2)\cdots\cdots E_n(C_n)$ ナル Projective operator ヲ對應セシムル。然シテ $\mathfrak{T}$ 上ノ任意ノ集合 M ニハ M ヲ高々可附番個ノ円 $C^{(1)}, C^{(2)}, \cdots\cdots$ ニテ覆ヒ，

$$E(C^{(1)}) \dotplus E(C^{(2)}) \dotplus \cdots\cdots$$

ナル Projective operator 総テノ durchschnitt $E^*(M)$ ヲ M ニ對應セシムル。然ルトキハ円 $C(C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n, \mathfrak{G}_{n+1}, \cdots\cdots)$ ニ對シテハ

$$E^*(C) = E(C)$$

ナリ。如何トナレバ、今円 C ヲ $C^{(1)}, C^{(2)}, \cdots\cdots$ ニ覆ヒタリトシ、又 $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots\cdots$ 上ノ円 $C_1, C_2, \cdots\cdots$ ニ對シ、同一中心ノ半径ガヨリ小ナル閉円 $\overline{C_1'}, \overline{C_2'}, \cdots\cdots$ ニ對シ

$$\overline{C}(\overline{C'_1}, \overline{C'_2}, \ldots\ldots, \overline{C'_n}, \mathfrak{G}_{n+1}, \ldots\ldots)$$

ハ $C^{(1)}, C^{(2)}, \ldots\ldots$ ノ有限個ニテ覆ハレル。（如何トナレバ Heine-Borel ノ定理ガ Euclid 空間ノ場合ト全然同様ニシテ証明シ得レバナリ。）今 $\overline{C}$ ガ

$$C^{(1)}(C_1^{(1)}, C_2^{(2)}, \ldots\ldots, C_{m_1}^{(1)}, \mathfrak{G}_{m+1}, \ldots\ldots)$$

$$C^{(2)}(C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$\vdots$$

$$C^{(m)}(C_1^{(m)}, C_2^{(m)}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

ニテ覆ハレタトスル。$\{C_1^{(1)}, \ldots\ldots, C_1^{(m)}, \overline{C'_1}\}$ ノ Menge ヨリナル Ring ノ minimal set ヲ $M_1^{(1)}, M_1^{(2)}, \ldots\ldots$ トスレバ、$C_1^{(1)}, \ldots\ldots, C_1^{(m)}, \overline{C'_1}$ ハ $M_1^{(1)}, M_1^{(2)}, \ldots\ldots$ ノ有限個ノ和トシ表ハサレ、　　　　$\ldots\ldots$ ハ何レノ二モ共有点ナシ。然カモ $E_1(\mathfrak{Z}_1)$ ニ関シ measurable ナルコトモ明カナリ。同様ニシテ $C_1^{(1)}, \ldots\ldots, C_2^{(m)}, \overline{C'_2}$，又其ノ以下ニモ夫々 minimal set $M_2^{(1)}, M_2^{(2)}, \ldots\ldots$ ヲ作ルモノトスレバ

$$E(C^{(1)}) \dotplus E(C^{(2)}) + \ldots\ldots \dotplus E(C^{(m)})$$

$$= E_1(C_1^{(1)}) E_2(C_2^{(1)}) \ldots\ldots E_{m_1}(C_{m_1}^{(1)}) \dotplus \ldots\ldots$$

$$= E_1\Big(\sum_i M_1^{(i)}\Big) E_2\Big(\sum_i M_2^{(i)}\Big) \ldots\ldots E_{m_1}\Big(\sum_i C_{m_1}^{(i)}\Big) \dotplus \ldots$$

$$= \Big(\sum_i E(M_1^{(i)})\Big)\Big(\sum E_2(M_2^{(i)})\Big) \ldots\ldots \Big(\sum_i E_{m_1}(C_{m_1}^{(i)})\Big) \dotplus \ldots$$

$$\geqq E_1(\overline{C'_1}) E_2(\overline{C'_2}) \ldots\ldots E_n(\overline{C'_n})$$

故ニ $\overline{C'_1} \to C_1, \ \overline{C'_2} \to C_2, \ldots\ldots, \overline{C'_n} \to C_n$ ナラシ

ムレバ

$$E(C^{(1)}) \dotplus E(C^{(2)}) \dotplus \cdots\cdots$$
$$\geqq E_1(C_1)E_2(C_2)\cdots\cdots E_n(C_n) = E(C)$$
$$\therefore\quad E^*(C) \geqq E(C)$$

又定義ヨリ當然 $E^*(C) \leqq E(C)$ ナルヲ以テ

$$E^*(C) = E(C)$$

然カモ上ノ証明ヨリ円 C ヲ円 $C^{(1)}, C^{(2)}, \cdots\cdots$ デ覆フ時ハ、常ニ

$$E(C) \leqq E(C^{(1)}) \dotplus E(C^{(2)}) \dotplus \cdots\cdots$$

ナリ。高々可附番個ノ円ノ和ヨリナル集合ヲ *open set* ト名ヅケルトキハ、円自身ハ *open set* ナリ。

然ルトキハ高々可附番個ノ *open set* $G^{(1)}, G^{(2)}, \cdots\cdots$ ノ和 $G^{(1)} \dotplus G^{(2)} \dotplus \cdots\cdots$ モ亦 *open set* ニシテ、上ノ性質ヨリ

$$E^*(G^{(1)} \dotplus G^{(2)} \dotplus \cdots\cdots) \leqq E^*(G^{(1)}) \dotplus \cdots\cdots$$

又一方、*definition* ヨリ

$$E^*(G^{(1)} \dotplus \cdots\cdots) \geqq E^*(G^{(1)})$$
$$E^*(G^{(1)} \dotplus \cdots\cdots) \geqq E^*(G^{(2)})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\therefore\quad E^*(G^{(1)} \dotplus \cdots\cdots) \geqq E^*(G^{(1)}) \dotplus \cdots\cdots$$
$$\therefore\quad E^*(G^{(1)} \dotplus \cdots\cdots) = E^*(G^{(1)}) \dotplus E^*(G^{(2)}) \dotplus \cdots\cdots$$

$$E(C^{(1)})\,E(C^{(2)}) = E_1(C_1^{(1)} \cdot C_1^{(2)})\,E_2(C_2^{(1)} C_2^{(2)})\cdots\cdots$$
$$= 0$$

故ニ open set $G^{(1)}$, $G^{(2)}$ ガ共有点ナケレバ

$$E(G^{(1)})E(G^{(2)})=0$$

open set $G^{(1)}$, $G^{(2)}$ ノ durchschnitt $G^{(1)}G^{(2)}$ ハ又 open set ナリ。如何トナレバ二円

$$C^{(1)}=(C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \cdots\cdots, C_n^{(1)}, \mathfrak{G}_{n+1}, \cdots\cdots)$$
$$C^{(2)}=(C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \cdots\cdots, C_m^{(2)}, \mathfrak{G}_{m+1}, \cdots\cdots)$$

ニ對シ、$n+m$ 次元 komplex Euclid 空間ニテニ円

$$C^{(1)}=(C_1^{(1)}, \cdots\cdots, C_n^{(1)}, \mathfrak{G}_{n+1}, \cdots\cdots, \mathfrak{G}_{n+m})$$
$$C^{(2)}=(C_1^{(2)}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \mathfrak{G}_{n+m})$$

ニ對シ $C^{(1)}C^{(2)}$ ガ高々可附番個ノ円ノ和トシテ表ハサレ、此等ノ円ニ $\mathfrak{G}_{n+m+1}, \cdots\cdots$ ヲ附加スレバ、$C^{(1)}C^{(2)}$ ガ $\mathfrak{T}$ ニテ open set ナルコトガワカル。open set ヲ用ヒレバ任意ノ集合 M ニ對シテ、$E^*(M)$ トハ M ヲ含ム総テノ open set G ノ $E^*(G)$ ノ durchschnitt ナリトイフコトが出来ル。コノ場合 f ガ Hilbert space ノ element ナルトキハ $\|E^*(M)f\|$ ハ $\|E^*(G)f\|$ ノ lower limit ナルコトガ容易ニ証明サレル。故ニ二集合 $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ 及ビ任意ノ f ニ對シテ

$$\|E^*(M^{(1)})f\|^2+\varepsilon_1 \geqq \|E^*(G^{(1)})f\|^2 \qquad (\varepsilon_1>0)$$
$$\|E^*(M^{(2)})f\|^2+\varepsilon_2 \geqq \|E^*(G^{(2)})f\|^2 \qquad (\varepsilon_2>0)$$

ナル $M^{(1)}$, 及ビ $M^{(2)}$ ヲ夫々含ム open set $G^{(1)}$, $G^{(2)}$ ガ存在ス。又 open set $G^{(1)}\dotplus G^{(2)}$ ハ $M_1 \dotplus M_2$ ヲ含ムヲ以テ

$$\| E^*(M^{(1)} \dot{+} M^{(2)}) f \|^2 \leqq \| E^*(G^{(1)} \dot{+} G^{(2)}) f \|^2$$
$$= \| (E^*(G^{(1)}) \dot{+} E^*(G^{(2)})) f \|^2$$
$$\leqq \| E^*(G^{(1)}) f \|^2 + \| E^*(G^{(2)}) f \|^2$$
$$\leqq \| E^*(M^{(1)}) f \|^2 + \| E^*(M^{(2)}) f \|^2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

ε_1, ε_2 ハ任意ナルヲ以テ

$$\| E^*(M^{(1)} \dot{+} M^{(2)}) f \|^2 \leqq \| E^*(M^{(1)}) f \|^2 + \| E^*(M^{(2)}) f \|^2$$
$$= \| (E^*(M^{(1)}) \dot{+} E^*(M^{(2)})) f \|^2 + \| E^*(M^{(1)}) E^*(M^{(2)}) f \|^2$$

$$\therefore \| (E^*(M^{(1)} \dot{+} M^{(2)}) - E^*(M^{(1)}) E^*(M^{(2)})) f \|^2 \leqq \| (E^*(M^{(1)}) \dot{+} E^*(M^{(2)})) f \|^2$$

f ハ任意ナルヲ以テ

$$(\#) \quad E^*(M^{(1)} \dot{+} M^{(2)}) - E^*(M^{(1)}) E^*(M^{(2)}) \leqq E^*(M^{(1)}) \dot{+} E^*(M^{(2)})$$

又、定義ヨリ直チニ

$$E^*(M^{(1)} \dot{+} M^{(2)}) \geqq E^*(M^{(1)}) \dot{+} E^*(M^{(2)})$$
$$(\#) \quad E^*(M^{(1)} M^{(2)}) \leqq E^*(M^{(1)}) E^*(M^{(2)})$$

集合 M ノ Complement ヲ M′ ニテ表ハスコトトスル。

$$E^*(M) E^*(M') = 0$$

ナルガ如キ集合 M ヲ *measureable set* ト定義シ、$E^*(M) = E(M)$ ト記スコトヽスル。又 $\mathfrak{T}$ ハ *measurable* トスル。M ガ *measurable* ナルトキハ (#) ヨリ

$$E(\mathfrak{T}) = E^*(M + M') \leqq E(M) + E(M')$$

故ニ

$$1 = E(\mathfrak{T}) = E(M) + E(M')$$

又 M ヲ measurable $M^{(1)}$ ヲ $MM^{(1)}=0$ ナル任意ノ集合ト

スレバ

$$M' \supset M^{(1)}$$

ヨリ

$$E(M') \geqq E^*(M^{(1)})$$

$$\therefore \quad E^*(M^{(1)}) \cdot E(M) = 0$$

故ニ (#) ヨリ

$$E^*(M^{(1)}+M) = E^*(M^{(1)}) + E(M)$$

$M^{(1)}$ ヲ任意ノ集合トスレバ

$$\begin{aligned} E^*(M^{(1)} \dotplus M) &= E^*((M^{(1)}-M^{(1)}M)+M) \\ &= E^*(M^{(1)}-M^{(1)}M) + E(M) \\ &\leqq E^*(M^{(1)}) \dotplus E(M) \end{aligned}$$

故ニ (#) ヨリ

$$E^*(M^{(1)} \dotplus M) = E^*(M^{(1)}) \dotplus E(M)$$

$M^{(1)}$ ヲ measurable トスレバ

$$E^*(M^{(1)} \dotplus M) = E(M^{(1)}) \dotplus E(M)$$

$$E^*(M^{(1)\prime} M') \leqq E(M^{(1)\prime}) \cdot E(M') = 1-(E(M^{(1)}) \dotplus E(M))$$

$$\therefore \quad E^*(M^{(1)} \dotplus M) \cdot E^*(M^{(1)\prime} M') = 0$$

然ルニ $(M^{(1)} \dotplus M)' = M^{(1)\prime} M'$ ナルヲ以テ

$M^{(1)} \dotplus M$, $M^{(1)\prime} M'$ 共ニ measurable ニシテ

$$E(M^{(1)} \dotplus M) = E(M^{(1)}) \dotplus E(M)$$

$$E(M^{(1)} M) = E(M^{(1)})\, E(M)$$

又 $M^{(1)} \supset M$ ガ共ニ measurable ナレバ, $M^{(1)} M'$ 即チ

$M^{(1)}-M$ モ measurable ニシテ

$$E(M^{(1)}-M)=E(M^{(1)})-E(M)$$

又 $M^{(1)}, M^{(2)}, \cdots\cdots$ ガ悉ク measurable ニシテ何レノ二ツモ共有点ナキモノトス。

$$M=M^{(1)}+M^{(2)}+\cdots\cdots$$

ト置ケバ、定義ヨリ直チニ

$$E^*(M)\geqq E(M^{(1)})+E(M^{(2)})+\cdots\cdots$$

又任意ノ f ニ対シテ

$$\| E(M^{(n)})f\|^2+\varepsilon_n>\| E^*(G^{(n)})f\|^2$$

$$(\varepsilon_n>0)$$

ナルガ如キ M^n ヲ含ム open set $G^{(n)}$ ガ存在スルヲ以テ

$$\begin{aligned}\| E^*(M)f\|^2 &\leqq \| E^*(G^{(1)}\dotplus G^{(2)}\dotplus\cdots\cdots)f\|^2\\ &=\| (E^*(G^{(1)})\dotplus E^*(G^{(2)})\dotplus\cdots\cdots)f\|^2\\ &\leqq \| E^*(G^{(1)})f\|^2+\| E^*(G^{(2)})f\|^2+\cdots\cdots\\ &\leqq \| E(M)f\|^2+\| E(M^{(2)})f\|^2+\cdots\cdots\\ &\qquad +(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\cdots)\end{aligned}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots$ ハ任意ナルヲ以テ

$$\| E^*(M)f\|^2\leqq \| (E(M^{(1)})+E(M^{(2)})+\cdots\cdots)f\|^2$$

f ハ任意ナルヲ以テ

$$E^*(M)\leqq E(M^{(1)})+E(M^{(2)})+\cdots\cdots$$

故ニ

$$E^*(M)=E(M^{(1)})+E(M^{(2)})+\cdots\cdots$$

又

$$E^*(M')\leqq E(M^{(1)\prime})\,E(M^{(2)\prime})\cdots\cdots=1-E^*(M)$$

$\therefore \quad E^*(M')E^*(M)=0$ 即チMハ measurable

故ニ又

$$E(M')=E(M^{(1)'})E(M^{(2)'}) \text{-------}$$

次ニ円 $(C_1, C_2, \text{-------}, C_n, \mathfrak{G}_{n+1}, \text{-------})$ ガ measurable ナルコトヲ証明スル。$C_1, C_2, \text{-------}, C_n$ ニ含マレル円ヲ $K_1, K_2, \text{-------}, K_n$ トシ其ノ閉円ヲ $\overline{K_1}, \overline{K_2}, \text{-----}$ トスレバ, Complement $\overline{K_1}', \overline{K_2}', \text{-----}$ ハ又円ナリ、然カモ

$$(C_1, C_2, \text{-------}, C_n, \mathfrak{G}_{n+1}, \text{-------})'$$

$$\subset(\overline{K_1}', \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3, \text{-----}) \dotplus (\mathfrak{G}_1, \overline{K_2}', \mathfrak{G}_3, \text{-----}) \dotplus \text{----}$$

故ニ

$$E^*((C_1, C_2, \text{-----}, C_n, \mathfrak{G}_{n+1}, \text{-----})')$$

$$\leqq E^*((\overline{K_1}', \mathfrak{G}_2, \text{-----}) \dotplus \text{-----}$$

$$= E_1(\overline{K_1}') \dotplus E_2(\overline{K_2}') \dotplus \text{-----}$$

$$= 1 - E_1(\overline{K_1})E_2(\overline{K_2}) \text{-----} E_n(\overline{K_n})$$

$K_1 \longrightarrow C_1, \quad K_2 \longrightarrow C_2, \text{-------}, K_n \longrightarrow C_n$ ナラシムレバ

$$E^*((C_1, C_2, \text{-----}, C_n, \mathfrak{G}_{n+1}, \text{-----})')$$

$$\leqq 1 - E((C_1, C_2, \text{-----}, C_n, \mathfrak{G}_{n+1}, \text{-----}))$$

故ニ、円ハ measurable ナリ。故ニ又其ノ和タル open set ハ measurable ナリ。$\mathfrak{T}$ ノ measurable set ノ class ヲ $\{\mathfrak{Z}\}$ ニテ表ハスコトニスレバコレハ total additive ナリ, 次ニ $\{\mathfrak{Z}\}$ ニ関シ measurable ナ function ヲ次ノ如ク定義スル。

函數$\alpha(z_1, z_2, \text{------})$ガ measurable ナリトハ任意ノ正數$r$及ビ complex number a ニ對シ

$$|\alpha - a| < r$$

ナル點集合ガ$\{z\}$ニ關シ measurable ナルコトナリ。

故ニ、$\alpha_1, \alpha_2, \text{----}$ガ measurable ニシテ

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$$

ナルトキハ又αガ measurable ナリ。如何トナレバ

$$|\alpha_n - a| < r$$

ナル點集合ヲz_nトスレバ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ z_n$$

ニ屬スル點ニテハ

$$|\alpha - a| < r$$

ナリ。故ニ$|\alpha - a| < r$ナル點集合ヲz_0トスレバ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ z_n < z_0$$

z_0ノ點ニ對シテハ、nヲ充分大ニスレバ

$$|\alpha_n - a| < r$$

故ニ

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ z_n \supset z_0$$

從ツテ

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} z_0$$

故ニz_0ハ measurable 即チαハ measurable ナリ。

又次ノ定理ガ成立スル。

定理. α ガ measurable ナタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ正數 ε ニ對シテ $\mathfrak{T}$ ヲ次ノ如キ高々可附番個ノ measurable sets $Z_1, Z_2, \cdots\cdots$ ニ分割可能ナルコトナリ。即チ Z_n ニテ α ノ Schwankung ガ ε ヨリ小ナルガ如シ。

証明. Gaussian plane ニ $a_1, a_2, \cdots\cdots$ ガ überal dicht トス。若シ α ガ measurable ナレバ

$$|\alpha - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ナル点集合ヲ Z_n トスレバ、α ハ Z_n ニテ Schwankung ハ ε ヨリ小ナリ。又

$$W_1 = Z_1,$$

$$W_2 = Z_2 - Z_1 Z_2$$

$$W_3 = Z_3 - (Z_1 \dotplus Z_2) Z_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ト置ケバ、$W_1, W_2, W_3, \cdots\cdots$ ガ求ムル分割ナリ。又逆ニ任意ノ ε ニ對シ常ニ此ノ如キ分割ガ可能ナレバ、今 ε_n ニ對スル分割 $W_1^{(n)}, W_2^{(n)}, \cdots\cdots$ ノ中ニテ

$$|\alpha - a| < r$$

ノ集合 Z_0 ニ含マレルモノノ和集合ヲ $W^{(n)}$ トスレバ $\varepsilon_n \to 0$ トシタ時 $W^{(1)} \dotplus W^{(2)} \dotplus \cdots\cdots$ ハ measurable ニシテ

$$W^{(1)} \dotplus W^{(2)} \dotplus \cdots\cdots \subset Z_0$$

又 Z_0 ノ任意ノ点ニ對シテ α ガ α_0 トスレバ $\varepsilon_n < r - |\alpha_0 - a|$

ナル ε_n ニ對シテハ、コノ点ハ $\mathfrak{W}^{(n)}$ ニ含マレル。故ニ

$$\mathfrak{W}^{(1)} \dot{+} \mathfrak{W}^{(2)} \dot{+} \cdots\cdots = \mathfrak{Z}_0$$

即チ $\mathfrak{Z}_0$ ハ measurable ナリ。

此ノ定理ヨリ二ツノ measurable function ノ和, 差, 積ガ measurable ナルコトモ容易ニ証明サレル。

$\alpha(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \cdots\cdots)$ ガ measurable ナルトキ, ε_n ニ對スル分割 $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \cdots\cdots$ ニ對シ、f ヲ Hilbertspace ノ任意ノ element トスレバ

$$\sum |\alpha(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \cdots\cdots)|^2 \, \| E(\mathfrak{Z}_n) f \|^2$$

($(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \cdots\cdots)$ ハ $\mathfrak{Z}_n$ 内ノ一点) ハ $\varepsilon_n \to 0$ ニ對シ常ニ同一極限値ヲ有ス。此レヲ

$$\int_{\mathfrak{T}} |\alpha|^2 d \| E(\mathfrak{z}) f \|^2$$

ト記ス。此レガ finite ナル f ヲ α ノ simvoll ナ element ト定義スル。α ノ simvoll ナ element f ニ對シテハ

$$\sum \alpha(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \cdots\cdots) \; (E(\mathfrak{Z}_n) f, g)$$

ハ Schwarz ノ不等式ヨリ $\varepsilon_n \to 0$ ニ對シ常ニ一定極限値ヲ有スルコトガ証明サレル。此レヲ

$$\int_{\mathfrak{T}} \alpha(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \cdots\cdots) \, d(E(\mathfrak{z}) f, g)$$

ト記ス。又

$$(Nf, g) = \int_{\mathfrak{T}} \alpha(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \cdots\cdots) \, d(E(\mathfrak{z}) f, g)$$

ヨリ Hypermaximal normal operator N ガ定義サレルコトモ一変數ノ場合ト同様ナリ。此ノ N ヲ $f(N_1, N_2, \cdots\cdots)$ ト記ス。

函數 $f(N_1, N_2, \cdots\cdots)$ ニ對シテハ一ツノ normal operator ノ函數ノ場合ト全然同様ニシテ次ノ諸定理ガ証明サレル。

定理. hypermaximal normal operator N ガ $N_1, N_2, \cdots\cdots$

ハ N ノ measure operator ノ ring ガ $(N_1, N_2, \cdots\cdots)$ ノ measure operator ノ ring ニ含マレルコトナリ。

定理. hypermaximal normal operator N ノ measure operator ノ ring ガ $(N_1, N_2, \cdots\cdots)$ ノ measure operator ノ ring ト一致スレバ $N_1, N_2, \cdots\cdots$ ハ N ノ函數ナリ。

定理. hypermaximal normal operator N ガ $(N_1, N_2, \cdots\cdots)$ ノ函數ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ N ガ $N_1, N_2, \cdots\cdots$ ノ各ト commutative ナ總テノ Projective operator ト commutative ナルコトナリ。

（注意） 以上ノ理論ニテハ space ガ separable ナルコトヲ使用セズ。從ッテ一般 Euclid 空間ニテ成立ス。又 Torus space ノ measure ノ construction ノ methode ハ §1 ノ定理

ノ証明ニ其ノマヽ應用サレル。