788. Eigenwertproblem ノ一証明(續)

中野　秀五郎

§5. normal operator H ガ hyper maximal トハ H ノ measure operator E(X) ガ全平面ニ對シ 1 トナルコトデアルト定義シタガ、此ノ定義ガ在來ノ定義ト一致スルコトハ spectralisation ガ一通リニ出來ルコトカラ明カデハアルガ、直接本論文ノ定義ヨリ出發シテ証明シテ見ル。

E(X) ヲ hyper maximal measure operator トスル。コレニ對シ函數 $f(x)$ ガ殆連續(此ノ殆連續

ハ著者ガ東京物理學校校友會雜誌ニノセシモノト同様ノ考ヘナリ）ナリトハ gaussian plane 上適當ニ bounded closed set

$$Z_1 \subset Z_2 \subset \cdots\cdots$$

ヲ

$$\lim_{n \to \infty} E(Z_n) = 1$$

ナル如クニ取リタルトキ $f(z)$ ガ常ニ Z_n ニテ連續ナルトキニ云フ。

定理. hyper maximal measure operator $E(X)$ ニ關シ $f(z)$ ガ殆連續ナルトキハ

$$(1) \quad (Hf, g) = \int f(z)\, d\,(E(X)f, g)$$

ヨリ定義セラレル linear operator Hf ハ hyper maximal normal operator ニシテ其ノ definitionsbereich ハ

$$(2) \quad \int |f(z)|^2 d\,|E(X)f|^2$$

ガ收斂スルガ如キ f ノ集合 $\mathfrak{M}$、又

$$(3) \quad (H^* f, g) = \int \overline{f(z)}\, d\,(E(X)f, g)$$

ナリ。

証明： (2)ガ收斂スルトキ(1)ノ積分ガ收斂スルコトハ Schwarz ノ不等式ヨリ簡單ニ証明サレル。然カモ

$$\left|\int f(z)\,d(E(X)f,g)\right| \leqq \sqrt{\int |f(x)|^2 d|E(X)f|^2}\cdot|g|.$$

ヨリ Riesz ノ定理ニヨリ linear operator H ガ定義サレ、$E(X)$ ト commutative ナルコトモ在來ノ方法ト同樣ニ證明サル。又 H ガ normal ナルコトノ證明モ在來ノモノト同樣ニ簡單ナレバ略ス。殘ルハ H ガ hypermaximal ナルコトナリ。即チ H ノ measure operator $F(X)$ ガ全平面ニ對シ 1 ナルコトナリ。此レハ次ノ如クニシテ證明サレル。

$f(z)$ ハ Z_n ハ bounded closed トルヲ以テ Z_n ニテ常ニ

$$|f(z)| \leqq M_n$$

ナル M_n ガ存在ス。今 H ノ原點ヲ中心 M_n ヲ半徑トスル円 $\overline{U}_n$ ニ對スル measure operator $F(\overline{U}_n)$ ヲ考ヘテ見ルニ

$$|HE(Z_n)f|^2 = \int_{Z_n} |f(x)|^2 d|E(X)f|^2$$

$$\leqq M_n \int_{Z_n} d\left(E(X)f,f\right) = M_n |E(Z_n)f|^2$$

故ニ

$$F(\overline{U}_n) \geqq E(Z_n)$$

故ニ　$F \geqq \lim F(\overline{U}_n) \geqq 1$

從ツテ H ハ hyper maximal ナリ。

定理・ Hyper maximal normal operator

H ガ 0 ヲ Eigenwert ニ有サゞルトキハ其ノ逆 inverse operator H^{-1} ガ又 Hyper maximal normal ナリ。

証明. H ノ measure operator $E(X)$ ニ對シ

$$(H^{-1}f, g)=\int\frac{1}{z}\,d(E(X)f, g)$$

ハ H ガ 0 ナル Eigenwert ヲ有サゞルヲ以テ $\frac{1}{z}$ ハ $E(X)$ ニ関シ殆連続ナルヲ以テ Hypermaximal normal operator H^{-1} ヲ決定ス。$f=HH^{-1}f=H^{-1}Hf$ ナルコトハ在来ノ方法ト同様簡単ニ証サル。

定理. Definitionsbereich $\mathfrak{M}$ ニテ常ニ

$$|Hf|\geqq\varepsilon|f| \qquad (\varepsilon>0)$$

ナルガ如キ normal operator H ガ hyper maximal ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ

$$\varphi=Hf$$
$$\psi=H^*f$$

ト置キテ得ル linear operator $\psi=U\varphi$ ガ unitary ナルコトナリ。

証明. 先ヅ必要ナルコトヲ証明スル。H ガ hyper maximal ナルトハ H^{-1} モ亦然リ, $(\because |Hf|\geqq\varepsilon|f|)$

$$|Hf|\geqq\varepsilon|f|$$

ヨリ

$$|\varphi|\geqq\varepsilon|H^{-1}\varphi|$$

即チ H^{-1} ハ bounded normal operator 故ニ其ノ

definitionsbereich ハ一般 Euclid 空間全体ナリ。又 H^* ニ對シテモ同様 H^{*-1} が有界 hyper maximal ニシテ其ノ definitionsbereich が一般 Euclid 空間全体、然カモ φ ト ψ トハ

$$|\varphi| = |Hf| = |H^*f| = |\psi|$$

ニテ Längentreu. 故ニ U ニ unitary ナリ。逆ニ $\psi = U\varphi$ が unitary ナレバ $H^{-1}\varphi$ ノ definitionsbereich が全空間，從ッテ $H^{-1}\varphi$ ハ bounded（此レハ elementary ニ証明サレル）故ニ $H^{-1}\varphi$ ハ hyper-maximal 故ニ前ノ定理ニヨリ Hf ハ hyper maximal ナリ。

此ノ定理ハ J. v. Neumann ノ Hermition operator ニ関スル Caley transformation ノ理論ヲ含ムモノナリ。如何トナレバ、Hf ヲ Hermitian トスレバ $(H+i)f$ ハ normal operator ニシテ然カモ

$$|(H+i)f|^2 = |Hf|^2 + |f|^2 \geqq |f|^2$$

故ニ、$(H+i)f$ が hyper maximal ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ

$$\varphi = (H+i)f$$
$$\psi = (H-i)f$$

ヨリ決定サル linear operator $\psi = U\varphi$ が unitary ナルコトニシテ、此レハ即チ Hermitian operator が hyper maximal ナルタメノ J. v. Neumann

ノ定義ナリ。

Eigenwertproblem ノ一証明（訂正）

§1 ニ於テ、開円 $\overline{\text{ひ}}$ ニ對スル條件

2° $\overline{\text{ひ}} < \overline{\nabla}$ ナルトキハ $E(\overline{\text{ひ}}) \leqq E(\overline{\nabla})$ ヲ次ノ如クニ改メル。

$\overline{2}$° 円 $\overline{\text{ひ}}$ ガ $\overline{\text{ひ}}_1, \overline{\text{ひ}}_2, \cdots\cdots, \overline{\text{ひ}}_n$ ニテ覆ハレルトキ $E(\overline{\text{ひ}})$ ノ表ハス linear closed manifold ハ $E(\overline{\text{ひ}}_1), \cdots\cdots, E(\overline{\text{ひ}}_n)$ ノ各々デ表ハサレル linear closed manifold カラ和トシテ作ラレ linear closed manifold ニ含マレル。即チ

$$
\begin{aligned}
E(\overline{\text{ひ}}) \leqq E(\overline{\text{ひ}}_1) &+ \{E(\overline{\text{ひ}}_2) - E(\overline{\text{ひ}}_1)E(\overline{\text{ひ}}_2)\} \\
&+ \{E(\overline{\text{ひ}}_3) - E(\overline{\text{ひ}}_1)E(\overline{\text{ひ}}_3) - E(\overline{\text{ひ}}_2)E(\overline{\text{ひ}}_3) \\
&- E(\overline{\text{ひ}}_1)E(\overline{\text{ひ}}_2)E(\overline{\text{ひ}}_3)\} \\
&+ \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

此ノ條件ヲ改メネバ円ニ對シテノ measure operator ガ一般ニ拡張スルコトガ必ズシモ出來ナイ。

此ノ條件ヲ改メタタメ §2 ニ於テ normal operator ニ関シ $E(\overline{\text{ひ}})$ ガコノ條件ヲ満足スルコトノ証明ヲ附加セネバナラヌ。其レハ次ノ如クニシテ証明サレル。

先ヅ $\overline{\text{ひ}}$ ガ充分大ナル円ニ對シテ $E(\overline{\text{ひ}}) \neq 0$ ナルトキハ如何程ニテモ半径ノ小ナル円ニシテ $E(\overline{\text{ひ}}) \neq 0$ ナルガ如キ円 $\overline{\text{ひ}}$ ガ常ニ存在スルコトヲ証明スル。

今中心 z_0，半径 r_0 ノ円 $\overline{\text{ひ}}_0$ ニ對シテ $E(\overline{\text{ひ}}_0) = 0$ ナ

リトス。又 $\overline{\mho}_1$ ヲ $\overline{\mho}_0 \subset \overline{\mho}_1$ ニシテ $E(\overline{\mho}_1) \neq 0$ ナル充分大ナル円トス。然ルトキハ $E(\overline{\mho}_1)$ ノ *manifold* 内ノミニ就テ考ヘテ

$$H_0 = \frac{H - Z_0}{r_0} E(\overline{\mho}_1)$$

ト置ケバ H_0 ハ *bounded normal* 即チ $|H_0 f| \leqq M|f|$ ニシテ常ニ

$$|H_0^k f| \leqq |f| \qquad (k = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナルガ如キ *element* ハ存在セズ。故ニ

$$|(H_0 H^*)^k f| \leqq |f| \qquad (k = 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナルガ如キ *element* モナシ。然カモ $H_0 H_0^*$ ハ *bounded positive definite Hermition operator* ナルヲ以テ

B. A. *Lengyel* and M. H. *Stone* (*Annals.* Vol 37, 859 頁) ノ *Theorem* Hb (此ノ定理ノ証明ハ *elementary* ナリ) ニヨリ如何ナル *element* f ニ對シテモ

$$(H_0 H_0^* f, f) \geqq (f, f)$$

ナリ。従ッテ常ニ

$$|H_0 f| \geqq |f|$$

故ニ $E(\overline{\mho}_0) = 0$ ナレバ常ニ

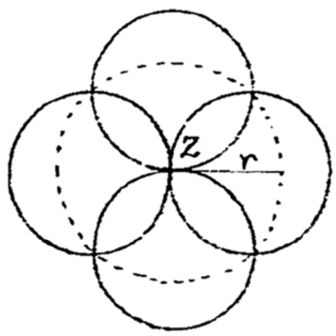
$$\left| \frac{H - Z_0}{r_0} E(\overline{\mho}_1) f \right| \geqq |E(\overline{\mho}_1) f|$$

$E(\overline{\mho}_1)$ ノ表ハス *manifold* 内ノミニテ考フレバ

$$\left|\frac{H-z_0}{r_0}f\right| \geqq |f|$$

サテ半径rノ円$\overline{U}$ニ對シテハ其ノ位置ノ如何ニ關セズ常ニ$E(\overline{U})=0$ナリトスレバ，任意ノ点zニ對シ常ニ

(1) $$\left|\frac{H-z-r}{r}f\right| \geqq |f|$$



(2) $$\left|\frac{H-z+r}{r}f\right| \geqq |f|$$

(3) $$\left|\frac{H-z-ir}{r}f\right| \geqq |f|$$

(4) $$\left|\frac{H-z+ir}{r}f\right| \geqq |f|$$

ナリ。(1)，(2)ヨリ

$$|(H-z)f|^2 - r((H+H^*-z-\overline{z})f, f) \geqq 0$$

$$|(H-z)f|^2 + r((H+H^*-z-\overline{z})f, f) \geqq 0$$

從ツテ

$$|(H-z)f|^2 \geqq r\,|((H+H^*-z-\overline{z})f, f)|$$

同様ニ(3)，(4)ヨリ

$$|(H-z)f|^2 \geqq r\,|(i(H-H^*-z+\overline{z})f, f)|$$

$(H-z)$ハ *bounded* ナルヲ以テ $\dfrac{|(H-z)f|}{|f|}$ ノ

upper limit ヲαトスレバ

$$\alpha^2|f|^2 \geqq r\,|((H+H^*-z-\overline{z})f, f)|$$

$$\alpha^2|f|^2 \geqq r\,|(i(H-H^*-z+\overline{z})f, f)|$$

fノ如何ニ成立シ、$(H+H^*\cdots)$ $i(H-H^*\cdots)$ハ *Hermitian*

ナルヲ以テ

$$\alpha^2|f| \geqq r|(H+H^*-z-\bar{z})f|$$

$$\alpha^2|f| \geqq r|i(H-H^*-z+\bar{z})f|$$

$$\therefore\quad 2\alpha^4|f|^2 \geqq r^2([(H+H^*-z-\bar{z})^2-(H-H^*-z+\bar{z})^2]f,f)$$

$$=4r^2((H-z)(H^*-\bar{z})f,f)=4r^4|(H-z)f|^2$$

$$\therefore\quad |(H-z)f| \leqq \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}r}|f|$$

$\dfrac{|(H-z)f|}{|f|}$ ノ upper limit ガ α ナルヲ以テ

$$\alpha \leqq \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}r} \qquad \therefore\quad \alpha \geqq \sqrt{2}r > 1.4r$$

故ニ $\quad |(H-z)f| > 1.4r|f|$

ナル element f ハ常ニ存在スル。故ニ今 z ヲ中心 $1.4r$ ナル半徑ノ円 $\mathfrak{U}_1$ ニ對シ $E(\mathfrak{U}_2)\neq 0$ トスレバ $HE(\mathfrak{U}_1)E(\mathfrak{U}_2)$ ナル operator ヲ $E(\mathfrak{U}_1)E(\mathfrak{U}_2)$ ノ manifold 内ニテ考フレバ，ヤハリ半徑 r ノ円ニ對シテハ常ニ $E(\mathfrak{U})=0$ ニシテ、然カモ $E(\mathfrak{U}_1)\geqq E(\mathfrak{U}_2)\neq 0$ ナルニヨリ

$$|(H-z)f| > 1.4r|f|$$

ナル element ガ $E(\mathfrak{U}_2)$ ノ manifold 内ニ存在スルコトニナリテ，一方 $E(\mathfrak{U}_2)$ ノ manifold ハ

$$|(H-z)^k f| \leqq 1.4r|f| \qquad (k=1,2,\cdots\cdots)$$

ナル element ナルコトニ矛盾ス。故ニ z ヲ中心トシ，$1.4r$ ヲ半徑トスル円 $\mathfrak{U}_1$ ニ對シテハ $E(\mathfrak{U}_1)=0$ ナリ。又 z ハ任意ノ点トスルモ可ナルヲ以テ、結局 $1.4r$ ヲ半徑ト

スル總テノ円ニ對シ $E(\overline{U})=0$. 從ツテ同様ノ論法ニヨリ $(1,4)^k r$ $(k=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ半徑トスル円ニ對シ $E(\overline{U})=0$ 故ニ $\overline{U}_1$ ノ半徑ヨリ大ナル $(1.4)^k r$ ヲ半徑ノ円ニ對シテモ $E(\overline{U})=0$. 從ツテ $E(\overline{U}_1)=0$ トナリ矛盾ス。故ニ如何程ニテモ小ナル半徑ニシテ $E(\overline{U})\neq 0$ ナルガ如キ円ガ常ニ存在ス。

次ニ $E(\overline{U})$ ガ $\overline{2^\circ}$ ヲ満足スルコトヲ証明スル。若シ満足セズトスレバ，即チ円 $\overline{U}$ ガ $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \cdots\cdots, \overline{U}_n$ ニテ覆ハレ、然カモ $E(\overline{U})$ ノ *manifold* ガ $E(\overline{U}_1), E(\overline{U}_2), \cdots\cdots, E(\overline{U}_n)$ ノ表スル *manifold* ノ和トノ和カラ得ラレタル *closed linear manifold* ニ含マレズトスレバ、$\overline{U}_1, \cdots\cdots, \overline{U}_n$ ノ半徑ヲ充分少シ諸シテモヤハリ同様ナルヲ以テ、最初ヨリ円 $\overline{U}$ ノ点ガ $\overline{U}_1, \cdots\cdots, \overline{U}_n$ 何レカノ内点ナリト假定ス。

今 $F=E(\overline{U})-E(\overline{U})\{E(\overline{U}_1)+\{E(\overline{U}_2)-E(\overline{U}_1)E(\overline{U}_2)\}+\cdots\cdots\}$

即チ F ヲ $E(\overline{U})$ ノ *manifold* ニ含マレ、$E(\overline{U}_1), \cdots\cdots, E(\overline{U}_2)$ ノ和ヨリ得ル *manifold* ニ含マレザル *element* ヨリナル *closed linear manifold* トス。從ツテ當然 H ト *commutative* ナ總テノ *bounded operator* ト *commutative* ナリ。$F\neq 0$ ナルヲ以テ HF ヲ F ノ *manifold* 内ノミニテ考フレバ、既ニ円 $\overline{U}$ ニ對シテ $E(\overline{U})$ $(\geqq F)$ ハ 0 ナラザルヲ以テ、半徑 ε ヲ如何ニ小トスルモ、$E(\overline{U}_\varepsilon)\neq 0$ ナル円 $\overline{U}_\varepsilon$ ガ存在ス。然ルニ

$FE(\overline{U}_1)=FE(\overline{U}_2)=\cdots\cdots=FE(\overline{U}_n)=0$ナルヲ以テ $\overline{U}_\varepsilon$ハ $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \cdots\cdots, \overline{U}_n$ ノ何レニモ含マレズ、然カモ $FE(\overline{U})=F$ ナルヲ以テ $\overline{U}$ ノ外部ニハアラズ。此ノ如キ円ハ ε ヲ充分大ニスレバ存在セザルヲ以テ矛盾ス。証明終リ。

以上ノ証明ニテ用ヒタ *Lengyel and Stone* ノ *Theorem 4b* ハ其ノ証明ガ *elementary* デハアルガ其ノ方法ハ、先ヅ有元次、*Hilbert space* 一般ユークリッド空間ト順次ニ証明スルモノニテアマリ感心セザルヲ以テ今ノ所 *dimension* ヲ用ヒザル方法ヲ研究中ナリ。

注意．§1 ニ於テハ *measure operator* ヲ *Lebesgue* 式ニセシモ *Eigenwertproblem* ノミヲ考フル場合ハ *Riemann* 式ニテ充分ニシテ、其ノ場合ハ *Interval* ノミヲ考フレバ可ナルニヨリ非常ニ簡単トナル。