787. Eigenwertproblem ノ一証明

中野　秀五郎

一般 complex Euclidean space $\mathfrak{L}$ ニ於ケル normal operator ノ Eigenwertproblem ハ J. v. Neumann ノ方法ニヨレバ先ヅ bounded Hermitian operator ノ Eigenwertproblem ヨリ始マリ、次ニ bounded normal operator ヲ証明シ、次ニ unbounded Hermitian operator ヲ Unitary operator ノ場合ニ変ヘテ証明シ、次イデ unbounded normal operator ノ Eigenwertproblem ヲ取扱フ。

此処デハ直接 unbounded normal operator ノ Eigenwertproblem ヲ取扱フ一証明ヲ述ベル。

§1. 今 Gaussian plane 上ノ点集合ノ additive class $\{X\}$ ガ Borel 集合ヲ含ムモノトス。此ノ class ノ任意ノ集合 X ニ對シ、complex Euclidean space $\mathfrak{L}$ ノ projective operator $E(X)$ ガ對應シ、且ツ次ノ條件ヲ満足スルモノトス。

1° $\{X\}$ ノ任意ノ二集合 X, Y ニ對シ $E(X), E(Y)$ ハ commutative.

2°. $\{X\}$ ノ $X \subset Y$ ナル任意ノ二集合 X, Y ニ對シ $E(X) \leqq E(Y)$.

3°. $\{X\}$ ノ任意ノ集合列 $X_1, X_2, \cdots\cdots$ ニ對シ，X_i, X_j ($i \neq j$) ガ共有点ナキトキハ

$$E(X_1+X_2+\cdots\cdots) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots\cdots$$

以上ノ如キ projective operator $E(X)$ ガ定義セラレテヰルトキ此ノ $E(X)$ ヲ measure operator ト呼ブコトトス。又 X ガ Gaussian 全平面ナルトキノ $E(X)$ ヲ單ニ E ト記ス。E ガ Einheit I ナルトキ $E(X)$ ヲ hyper maximal ト名ヅケル。

additive class $\{X\}$ ニ對シ $E(X)$ ガ定義セラレテヰルトキハ、Gaussian plane 上ノ任意ノ円 $\overline{U}$（開集合トス）ハ又 $\{X\}$ ニ属スルヲ以テ、任意ノ二円 $\overline{U}$, $\overline{V}$ ニ對シ

1° $E(\overline{U})$, $E(\overline{V})$ ハ comutative.

2° $\overline{U} \subset \overline{V}$ ナルトキハ $E(\overline{U}) \leqq E(\overline{V})$

3° $\overline{U}$, $\overline{V}$ ガ共有点ナキトキハ $E(\overline{U})E(\overline{V}) = 0$

ナル條件ヲ満足ス。逆ニコノ條件スルガ如キ $E(\overline{U})$ ガ任意ノ円ニ對シテ與ヘラレテヰレバ、コレヨリ additive class $\{X\}$ ト measure operator $E(X)$ ガ定義デキル。如何トナレバ、任意ノ Borel 集合 X ニ對シテハ X ヲ高々可附番個ノ円 $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$, $\cdots\cdots$ ニ覆ヒ、$E(\overline{U}_1)$, $E(\overline{U}_2)$, $\cdots\cdots$ ナル projective operator ガ space $\mathfrak{L}$ ニテ表ハス closed linear manifold ヲ夫々 $\mathfrak{M}(\overline{U}_1)$, $\mathfrak{M}(\overline{U}_2)$, $\cdots\cdots$ トス。即チ $\mathfrak{M}(\overline{U}_1)$ トハ $E(\overline{U}_1)f = f$ ナルガ如キ $\mathfrak{L}$ ノ element f ノ集合

ナリ。次ニ $\mathfrak{M}(\overline{U}_1)+\mathfrak{M}(\overline{U}_2)+\cdots\cdots$ ヲ含ム最小 closed linear manifold ヲ $\mathfrak{M}(\overline{U}_1+\overline{U}_2+\cdots\cdots)$ トス。此ノ如キ覆ヒ方ノスベテニ對シ、$\mathfrak{M}(\overline{U}_1+\overline{U}_2+\cdots\cdots)$ ノ共通集合 $\mathfrak{M}(X)$ ハ明カニ closed linear Manifold トナル。$\mathfrak{M}(X)$ ノ projective operator $E(X)$ ヲ X ニ對應セシム。又 Borel 集合 X ニシテ $E(X)=0$ ナル如キ X ニ含マル任意ノ集合 Y ニ對シテハ $E(Y)=0$ トシ、此ノ如キ Y ト Borel 集合トヨリナル最小 additive class $\{X\}$ ニテハ、$E(X)$ ガ求ムルモノナルコトガ證明サレル。或ハ又任意ノ集合 X ニ對シテ、以上ノ如ク $E(X)$ ヲ定義シ、此レヲ Caratheordy ノ outer measure ト同樣ニ考ヘテ measurable class $\{X\}$ ヲ定義スルコトモ得。何レモ實變數函數論ノ場合ト同樣ナリ。

§2. space $\mathfrak{L}$ ノ linear manifold $\mathfrak{M}$ ノ任意 element f, g ニ對シ、linear operator Hf, H^*f ガ定義セラレ、然カモ

$$(Hf, g)=(f, H^*g)$$

又、Hf ガ $\mathfrak{M}$ ニ屬スルトキハ H^*f モ亦 $\mathfrak{M}$ ニ屬シ

$$H^*Hf=HH^*f$$

同樣ニ H^*f ガ $\mathfrak{M}$ ニ屬セバ Hf モ $\mathfrak{M}$ ニ屬シテ

$$HH^*f=H^*Hf.$$

又、$f_n \longrightarrow f$ ナル $\mathfrak{M}$ ノ element $f_1, f_2, \cdots\cdots$ ニ對シ、Hf_n, H^*f_n ノ何レカ一方ガ收斂ナレバ f ハ $\mathfrak{M}$

ニ属スルモノトス。此ノ如キ Hf ヲ $\mathfrak{M}$ ニテ normal ナ operator ト定義ス。

H ヲ $\mathfrak{M}$（$\mathfrak{M}$ ハ $\mathfrak{L}$ ニテ überall dicht トス）ニテ定義セラレタル normal operator トス。次ヲ complex number γ ヲ正数トシ、$\mathfrak{M}$ ノ element f ニシテ $H^{*h}H^{k}f$ ($h, k = 1, 2, \cdots\cdots$) ガ $\mathfrak{M}$ ニ属シ且ツ

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{(H-z)^k}{\gamma^k}f\right| < \infty$$

ナルガ如キ element f ノ集合ハ closed linear manifold ヲナス。如何トナレバ

$$\bar{H} = \frac{H-z}{\gamma}$$

ト置ケバ、$\bar{H}$ モ亦 $\mathfrak{M}$ ニテ定義セラレタル normal operator ニシテ

$$\overline{\lim}\,|\bar{H}^k f| < \infty \qquad \overline{\lim}\,|\bar{H}^k g| < \infty$$

ナルトキハ

$$\overline{\lim}\,|\bar{H}^k(f+g)| \leqq \overline{\lim}\,|\bar{H}^k f| + \overline{\lim}\,|\bar{H}^k g| < \infty$$

又

$$|\bar{H}^k f|^2 = (\bar{H}^k f, \bar{H}^k f) = (\bar{H}^* \bar{H}^k f, \bar{H}^{k-1} f)$$
$$\leqq |\bar{H}^* \bar{H}^k f|\cdot|\bar{H}^{k-1} f| = |\bar{H}^{k+1} f|\cdot|\bar{H}^{k-1} f|$$

$$(\because\ |\bar{H}^* f|^2 = (\bar{H}^* f, \bar{H}^* f) = (\bar{H} f, \bar{H} f) = |\bar{H} f|^2)$$

故ニ $|\bar{H}^k f| > 0$ ($k=1, 2, \cdots\cdots$) ナルカ $|\bar{H}^k f| = 0$ ($k=1, 2, \cdots\cdots$) ナリ。$|\bar{H}^k f| > 0$ トスレバ

$$\frac{|\bar{H}^k f|}{|\bar{H}^{k-1} f|} \leqq \frac{|\bar{H}^{k+1} f|}{|\bar{H}^k f|}$$

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |\bar{H}^k f| < \infty$ ナルヲ以テ

$$\frac{|\bar{H}^{k+1} f|}{|\bar{H}^k f|} \leqq 1 \qquad (k=0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

ナラザルベカラズ。故ニ

$$|\bar{H}^k f| \leqq |f| \qquad (k=1, 2, \cdots\cdots)$$

ナリ。又此ノ如キ f ニ對シテハ

$$\overline{\lim} |\bar{H}^k f| < \infty$$

ナルコトハ明カナリ。故ニ此ノ如キ f ノ集合ハ

$$|\bar{H}^k f| \leqq |f|$$

ナル f ノ集合即チ closed linear manifold ノ $k=1, 2, \cdots\cdots$ ニ對スル durchschnitt ナルヲ以テ又 closed linear manifold ナリ。此ノ closed linear manifold ノ projective operator ヲ Gaussian plane 上 ζ ヲ中心トシ、r ヲ半徑トスル円 $\bar{U}$ (閉集合) ニ對應セシメテ $E(\bar{U})$ トス。然ルトキハ H ト commutative ノ任意ノ bounded linear operator T ハ $E(\bar{U})$ ト commutative トナル。如何トナレバ $|Tf| \leqq \gamma |f|$, $|\bar{H}^k T f| = |T\bar{H}^k f| \leqq \gamma |H^k f|$ ナルヲ以テ

$$\overline{\lim} |\bar{H}^k f| < \infty \text{ ナレバ } \overline{\lim} |\bar{H}^k T f| < \infty$$

ナリ。即チ $TE(\overline{U})f = E(\overline{U})Tf$.

又 H^* ト commutative ナ bounded linear operator T ハ $E(\overline{U})$ ト commutative トナル。如何トナレバ

$$\overline{\lim} \, |\overline{H}^k f| < \infty \text{ ナル } f \text{ ノ集合}$$
$$= \overline{\lim} \, |\overline{H}^{*k} f| < \infty \text{ ナル } f \text{ ノ集合}$$

ナルヲ以テナリ。故ニ $T = H^*$, 或ハ $T = H$ ト置クコトニヨリ H, H^* ハ $E(\overline{U})$ ト commutative ナリ。(此ノ証明ハ B. A. Lengyel and M. H. Stone. Annals of mathematics 37. No. 4, 858頁ニヨル)

故ニ Gaussian plane 上ノ任意ノ二円 $\overline{U}$, $\overline{V}$ ニ對シテハ $E(\overline{U})$ ト $E(\overline{V})$ トハ commutative ナリ。又円 $\overline{U}$ ガ $\overline{V}$ ニ含マレタリトスレバ $E(\overline{U}) \leqq E(\overline{V})$ ナリ。如何トナレバ、$\overline{U}$, $\overline{V}$ ノ中心及ビ半径ヲ夫々 z_1, z_2, r_1, r_2 トスレバ $E(\overline{U})f = f$ ナル f ハ closed linear manifold $\mathfrak{M}(\overline{U})$ ヲナシ、$\mathfrak{M}(\overline{U})$ ニテハ

$$\left| \frac{H - z_1}{r_1} f \right| \leqq |f|$$

トナル。$\mathfrak{M}(\overline{U})$ ニテ常ニ

$$\left| \frac{H - z_2}{r_2} f \right| \leqq |f|$$

ナルコトヲ証明スレバ可ナリ。其レハ

$$\frac{H - z_2}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} \, \frac{H - z_1}{r_1} + \frac{z_1 - z_2}{r_2}$$

ヨリ $\mathfrak{M}(\overline{\cup})$ ニテ

$$\left|\frac{H-z_2}{r_2}f\right| \leqq \frac{r_1}{r_2}|f| + \frac{|z_1-z_2|}{r_2}|f|$$

$$\leqq \frac{r_1+|z_1-z_2|}{r_2}|f| \leqq |f|$$

ヨリ得ラル。（$\overline{\cup}$ ガ $\overline{\nabla}$ ニ含マレルヲ以テ $\dfrac{r_1+|z_1-z_2|}{r_2} \leqq 1$ ナリ）。

次ニ、円 $\overline{\cup}$ ト $\overline{\nabla}$ トガ共有点ナキトキハ、$E(\overline{\cup})E(\overline{\nabla}) = 0$ ナリ。如何トナレバ $E(\overline{\cup})E(\overline{\nabla}) \neq 0$ トスレバ $E(\overline{\cup})E(\overline{\nabla})$ ハ又 projective Operator ニシテ，$E(\overline{\cup})E(\overline{\nabla})f = f$ ナル f ニ對シテハ $E(\overline{\cup})f=f$, $E(\overline{\nabla})f = f$ ナルヲ以テ

$$\left|\frac{H-z_1}{r_1}f\right| \leqq |f|, \quad \left|\frac{H-z_2}{r_2}f\right| \leqq |f|$$

トナル。然ルトキハ

$$|(z_1-z_2)f| \leqq (r_1+r_2)|f|$$

即チ

$$|z_1-z_2|\cdot|f| \leqq (r_1+r_2)|f|$$

$$|z_1-z_2| \leqq r_1+r_2$$

然ルニ、$\overline{\cup}$ ト $\overline{\nabla}$ トハ共有点ナキヲ以テ $|z_1-z_2| > r_1+r_2$ ナルコトニ矛盾ス，故ニ $E(\overline{\cup})E(\overline{\nabla}) = 0$ ナリ，以上ノコトヨリ §1 ニヨリ，normal operator H ハ additive class $\{X\}$ ト一ツノ measure operator $E(X)$ トヲ定メル。此ノ measure operator $E(X)$ ガ

hyper maximal ナルトキ normal operator H ハ hyper maximal ナリト云フコトンナ。故ニ H ガ bounded ナルトキハ $E(X)$ ガ hyper maximal ナルコトハ明カナルヲ以テ bounded normal operator ハ hyper maximal ナリ。

§3. H ヲ hyper maximal normal operator $E(X)$ ヲソノ measure operator トス。今後 $\{X\}$ ニ属スル集合ヲ measurable ト云フコトトス。H ノ定義セラレタル linear manifold ヲ $\mathfrak{M}$ ニテ表ハス。

bounded measurable ナ集合 X ガ原点ヲ中心トシ半径 r ナル円ノ内部ニアリトスレバ前節ニヨリ

$$\left|HE(X)f\right| \leqq \left|E(X)f\right|$$

ナリ。今 X ヲ n 個ノ measurable 集合 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ ニ分割シ、X_i ハ中心 z_i，半径 ε_i ナル円ニ含マルヽガ如クスレバ

$$\left|(H-z_i)\,E(X_i)f\right| \leqq \varepsilon_i \left|E(X_i)f\right|$$

故ニ任意ノ g ニ對シ

$$\left|((H-z_i)\,E(X_i)f,\, g)\right| \leqq \varepsilon_i \left|E(X_i)f\right| \cdot \left|g\right|$$

$$\left|(HE(X_i)f, g) - z_i(E(X_i)f, g)\right| \leqq \varepsilon_i \left|E(X_i)f\right| \cdot \left|g\right|$$

$$\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = E(X)$$

ナルヲ以テ

$$\left|(HE(X)f, g) - \sum z_i (E(X_i)f, g)\right|$$
$$\leqq \sum \varepsilon_i \left|E(X_i)f\right| \left|g\right|$$

$|\varepsilon_i| < \varepsilon \quad (i=1,2,\text{-----})$ ナラシムレバ

$$\left|(HE(X)f,g) - \sum z_i(E(X_i)f,g)\right| \leqq \varepsilon|f||g|$$

故ニ

$$(1) \quad (HE(X)f,g) = \int_X z\,d(E(x)f,g)$$

又

$$(E(X)f,\ H^*E(X)g) = \int_X z\,d(E(x)f,g)$$

$$(2) \quad (H^*E(X)g,f) = \int_X \bar{z}\,d(E(x)g,f)$$

ヲ得ル。

又 (1) ヨリ f ハ $\mathfrak{M}$ ノ element ナルニヨリ

$$(Hf,E(X)g) = \int_X z\,d(E(x)f,g)$$

$X \to \triangle$ Gaussian plane ナラシムレバ，此ノ左辺ハ常ニ (Hf,g) ニ收歛スルヲ以テ，右辺モ同一値ニ收歛シ

$$(Hf,g) = \int z\,d(E(x)f,g)$$

g ハ任意ナルヲ以テ，$g=Hf$ ト置ケバ

$$|Hf|^2 = \int z\,d(E(x)f,Hg)$$

然ルニ

$$(E(X)f,Hf) = \int_X \bar{z}\,d(E(x)f,f)$$

$$d(E(x)f, Hf) = \bar{z}\, d(E(x)f, f)$$

故ニ

$$|Hf|^2 = \int |z|^2 d(E(x)f, f)$$

或ハ

$$(3) \quad |Hf|^2 = \int |z|^2 d|E(x)f|^2$$

故ニ $\mathfrak{M}$ ノ任意ノ element f ニ對シ

$$(4) \quad \int |z|^2 d|E(x)f|^2$$

ガ收斂ナリ。逆ニ又 (4) ガ收斂ナルガ如キ f ハ $\mathfrak{M}$ ニ属ス。如何トナレバ bounded measurable set X ニ對シ常ニ

$$\left| \int_X z\, d(E(x)f, g) \right|^2 \leqq \int_X |z|^2 d|E(x)f|^2 \cdot \int_X d|E(x)g|^2$$

$$\leqq \int_X |z|^2 d|E(x)f|^2 \cdot |f|^2$$

ナルニヨリ

$$\int z\, d(E(x)f, g)$$

ガ收斂ス。

$$X_1 \subset X_2 \subset \longrightarrow 全\ \text{Gaussian plane}$$

ナラシムレバ (3) ヨリ

$$\left| H(E(X_n) - E(X_m))f \right| = \int_{X_n - X_m} |z|^2 d|E(x)f|^2$$

故ニ、$HE(X_n)f \to \bar{f}$

ナル $\bar{f}$ ガ存在シ、$E(X_n)f \to f$ ナルヲ以テ、f ハ $\mathfrak{M}$ ニ属ス。

逆ニ任意ノ hyper maximal measure operator $E(x)$ ヲ與フルトキハ

$$\int |z|^2 d|E(x)f|^2$$

ガ収斂ナルガ如キ f ハ linear manifold $\mathfrak{M}$ ヲナシ

$$(Hf, g) = \int z\,d(E(x)f, g)$$

ガ hyper maximal normal operator ナルコトハ在來ト同様簡單ニ證明サル。又此 H ノ measure operator ガ $E(X)$ トナルコトハ

$$\left|\left(\frac{H-z_1}{r_1}\right)^k f\right|^2 = \int \left|\frac{z-z_1}{r_1}\right|^{2k} d|E(x)f|^2$$

ヨリ中心 z_1 半徑 r_1 ノ円 $\overline{U}$ ノ H ノ measure operator ガ $E(\overline{U})$ ナルコトガ證明サル。從ツテ H ノ measure operator ハ §2 ヨリ $E(X)$ トナル。此レニヨリ H ニ對スル measure operator ノ unique ガ證明サレタ。

§4. hyper maximal normal operator H ガ Gaussian plane 上ノ連續曲線 $z(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ ト共有点ヲ有サヾル点集合ニ對シテハ measure operator ガ零ナルトキハ、§3 ヨリ

$$(Hf, g) = \int_0^1 z(t)\,d(E(t)f, g)$$

ヲ得ル。但シ $E(t)$ ハ $[0, t]$ ニ對スル $z(t)$ ノ集合ノ measure operator トス。Hermitian, unitary operator ハ共ニ此ノ場合トナル。

Hermitian operator ガ此ノ場合，即チ実軸以外ノ点集合 X ニ對シ $E(X)=0$ ナルコトハ

$$(HE(X)f, g)=\int_X z\, d(E(X)f, g)$$

$$(f, HE(X)g)=\int_X \bar{z}\, d(E(X)f, g)$$

$$\therefore \int_X \Im z\, d(E(X)f, g)=0$$

$$\therefore \int_X \Im z\, d|E(X)f|^2=0$$

故ニ常ニ $\Im z>0$ ナル点集合 X ニ對シテハ $E(X)=0$

又 $\Im z<0$ ナル点集合 X ニ對シテモ $E(X)=0$. 故ニ $\Im z=0$ ナル点ヲ含マザル点集合 X ニ對シテハ $E(X)=0$

又 unitary operator U ニ對シテハ

$$(UE(X)f, UE(X)f)=\int_X |z|^2 d|E(X)f|^2$$

$$(E(X)f, E(X)f)=\int_X d|E(X)f|^2$$

$$\therefore \int_X (1-|z|^2)\, d|E(X)f|^2=0$$

即チ $|z| \neq 1$ ナル点集合 X ニ對シテ $E(X)=0$ トナル。

（訂正）

§1 ニ於テ Gaussian plane 上ノ総テノ円$\overline{\cup}$ニ對シ projective operator $E(\overline{\cup})$ガ對應シ 1°, 2°, 3° ノ條件ヲ満タストセシ所ヘ、尚次ノ條件ヲ附加スル。

4° $\overline{\cup}$ノ中心ヲ変ヘズ，半径 r ヲ変ヘタトキ

常ニ $\displaystyle\lim_{r\to r_0+0} E(\overline{\cup}_r)=E(\overline{\cup}_{r_0})$

measure operator ヲ作ル場合ニハ此ノ條件ハ不要ナルモ、此ノ條件ナキトキハ measure operator $E(X)$ ガ$\overline{\cup}$ニ對シ必ズシモ最初$\overline{\cup}$ニ對應セシメラレタル projective operator ニ等シクナラヌ不便ガアル。

§2 ニ於ケル normal operator H ニ對シテ定義セル $E(\overline{\cup})$ ガ上ノ 4° ヲ満足スルコトハ次ノ如クニシテ証明サル。即チ中心 z_1, 半径 r ナル円$\overline{\cup}$ニ對シテ $E(\overline{\cup})$ ハ

$$|(H-z_1)^k f|\leqq r^k|f| \qquad k=1,2,\cdots\cdots$$

ナルガ如キ f ノ集合ナリ。故ニ $r>r_0$ ナル総ベテノ r ニ對シ此ノ式ヲ満タセバ，$r=r_0$ ニ對シテ満タスコトモ明カナリ。従ッテ 4° ガ満足サレル。

§1 ニ於テ 1°, 2°, 3°, 4° ヲ満足スルガ如ク総ベテノ円ニ projective operator ガ對應シテオル場合其レヨリ measure operator ヲ作ルニ色々ナ方法ニテナシ得ルモ次ノ如ク考フルガ最モ簡単ノ様ニ思ハル。先ヅ開集合ニ對シ、其レニ含マレル円ニ對應スル projective operator

ノ差ハス closed linear manifold ノ総テニヨリテ作ラレル closed linear manifold ノ projective operator ヲ以テ measure operator トシ，次ニ G_δ 集合ニ對シテ其レヲ含ム開集合ノ measure operator ニ對スル closed linear manifold ノ総テノ Durchschnitt ノ projective operator ヲ以テ measure operator トシ次ニ G_δ ノ零集合ヲ定義シ其ノ零集合ト G_δ トノ和及ビ差ハ additive class $\{X\}$ ヲ作ルコトガ簡単ニ証明サル。従ッテ measure operator モ定義サレル。