786. Hopfsche Gruppe ト連續變換

坂田 良次(阪大)

Polyeder ノ Betti 群ト Sphäre ヘノ連續變換トハ Abbildungsklasse ノ群特ニ Hopfsche Gruppe ニヨツテ密接ニ結バレテ牛ル。コノ群ハムシロ obere Bettische Gruppe ノ連續變換ニヨル表現ト見做サレル。Obere Bettische Gruppe ト untere Bettische Gruppe ノ關係ハ既ニ Kolmogoroff ニヨツテ詳シク研究サレテ牛ル。[1] §1 デハ連續變換ニ obererZyklus ヲ對應サセテ Hopfsche Gruppe ガ簡單ニツクラレルコトヲ述ベル。§2 ニ於テハ kompaktum ノ Sphäre ヘノ wesentlich ナ連續變換ニツイテ述ベル。Polyeder ノ場合ト同樣ニ有限次元ノ kompaktum ニ對シテ次ノ結果ガ得ラレル有限次元ノ Kompaktum ノ Sphäre ヘノ Abbildung ガ wesentlich ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ konvergenter Zyklus $Z \neq 0$ ガ存在シテ Z ガ wesentlich ニ abbilden サレルコトデアル。

§1. Hopfsche Gruppe[2] P_1 ヲ mod 1 デ

---

1) A. Kolmogoroff: Über die Dualität im Aufbaue der kombinatorischen Topologie. Recueil Math. T. 1 (43).

2) 次頁ヘ

reduzieren サレタ実数ノ加法群，$\mathfrak{G}$ ヲ整数全体ノ加法群トスル。$P^n = \overline{K}^n$ ヲ n 次元 Polyeder トシ，$K^\nu \subset K^n$ ハ K^n ノ高々 ν 次元単体全体カラツクラレル K^n 部分複体トスル。S^n ヲ n 次元 Sphäre トシ連続変換 $\overline{K}^n \xrightarrow{f} S^n$ ト homotop ナ f' デ $\overline{K}^{n-1}$ ヲ S^n ノ Nordpol ヘウツス変換ガアルカラコレヲ speziel デアルトイフコトニシテ $\overline{K}^n \longrightarrow S^n$ ノ連続変換ノ中 speziel ナモノノミヲ考ヘル。K^n ノ n 次元 Komplex ハ Koeffizientenbereich ノ値ヲトル Funktional $f^n(T^n)$ デアラハサレル。$\mathfrak{G}$ ニ関スル oberer Komplex ヲ $f^n(T^n)$ トシ，$\mathfrak{P}_1$ ニ関スル unterer Komplex ヲ $h^n(T^n)$ トスル。f^n ガ與ヘラレタトキ之レニ對シテ各単体 T^n ニ對シテ T^n ハ Nordpol ヘウツシテ Grad $f^n(T^n)$ ヲモツ連続変換 f ヲツクルコトガ出来ル、K^n ハ n 次元ダカ

---

2) H. Freudenthal: Hopfsche Gruppe, Comp. Math. 2 (1937)
コンデ用ヒル Formulierung ハ Pontrjagin ノモノデ Kolmogoroff ノ結果ヲ直接使フコトガ出来ルノデ便利デアルガ本質的ニハ Lefschetz ノモノト同ジデアル。
L. Pontrjagin: Classification des transformations d'un complexe n+1-dimensionnel dans une sphère n-dimensionnelle, C.R., 206 (1938)
S. Lefschetz: Sur les transformations des complexes en sphères, Fund. Math. 27(1936) 及ビ 31(1938)

ヲ仮論 f^n ハ oberen Zyklus デアル。

<u>Lemma</u> f^n, g^n ヲ二ツノ oberer Zyklus トスレバ f^n ト g^n ガ homolog ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ上ノヤウニシテツクツタ連續變換 f 及ビ g ガ homotop デアルコトデアル。

<u>充分ナコト</u>. $f^n \sim g^n$ ナラバ $n-1$ 次元 oberer Komplex f^{n-1} ガアッテ $g_0 f^{n-1} = f^n - g^n$ [3)]

即チ

$$g_0 f^{n-1}(\mathrm{T}^n) = \sum_{\mathrm{T}^n \to \mathrm{T}_j^{n-1}} f^{n-1}(\mathrm{T}_j^{n-1}) \qquad (*)$$

$\overline{\mathrm{K}}^n$ ト $\langle 0, 1 \rangle$ ノ topologisches Produkt $\overline{\mathrm{K}}^n \times \langle 0, 1 \rangle$ ヲ考ヘテ各細胞 $\mathrm{T}^n \times \langle 0, 1 \rangle$ ノ Rand ニ次ノヤウナ對應ヲ與ヘル。

$$\mathrm{T}^n \times (0) \;\to\; f^n(\mathrm{T}^n)$$
$$\mathrm{T}_j^{n-1} \times \langle 0, 1 \rangle \to -f^{n-1}(\mathrm{T}_j^{n-1})$$
$$\mathrm{T}^n \times (1) \;\to\; g^n(\mathrm{T}^n)$$

コノ對應ニヨッテ grad ヲ與ヘテ連續變換ヲツクレバ (*) カラワカルヤウニ $\mathrm{T}^n \times \langle 0, 1 \rangle$ ノ Rand デ unwesentlich トナルカラ $\mathrm{T}^n \times \langle 0, 1 \rangle$ 全体ヘ，從ッテ $\overline{\mathrm{K}}^n \times \langle 0, 1 \rangle$ 全体ヘ擴張デキル。シカモ $\overline{\mathrm{K}}^n \times (0)$ 及ビ $\overline{\mathrm{K}}^n \times (1)$ デハソレゾレ f 及ビ g ト一致スルカラ f ト g ハ homotop デアル。

<u>必要ナコト</u> f ト g ガ homotop ナラバ n 次元

---

3) g_0 ハ oberer Randoperator

unterer Zyklus ノ P_1 ヘノ同ジ Homomorphismus ヲ與ヘルカラ $f^n \sim g^n$ 4)

Lemma カラ直チニワカルヤウニ obere Bettische Gruppe $B_o^n(K^n)$ ニ isomorph ナ変換類ノ群ガデキル。コレガ Hopfsche Gruppe デアル。P_1 ニ関スル untere Bettische Gruppe $B_u^n(K^n)$ ト $B_o^n(K^n)$ ガ mod 1 デ Charakterengruppe デアルコトカラ

(i) Hopfsche Gruppe ト $B_u^n(K^n)$ ハ mod 1 デ互ニ charakterengruppe ヲナス。

一般ニ r 次元 Betti群 $B_u^r(K^n)$ ニ對シテモ同ジヤウナ結果ガ得ラレル。コノ場合ニハ K^n 全体ノ変換 $\bar{K}^n \rightarrow S^r$ ヲ考ヘナイデ $\bar{K}^r (\subset \bar{K}^n)$ ノ変換 $\bar{K}^r \rightarrow S^r$ ヲ考ヘル。ソノ中デ K^n ノスベテノ $r+1$ 次元単体ノ Rand デハ unwesentlich ナ変換ヲ正規変換トイフコトニスル。コレハ Homotopie ニヨツテカハラナイカラ正規変換類ガ考ヘラレル。コノ正規変換類ノミデ前ト同様ニ群ヲ定義スル。

正規変換類ノ中カラ speziel ナ変換ヲトツテ oberer Komplex ヲ對應サセタトキ oberer Zyklus ニナルコトヲ証明スレバ充分デアル。

一般ニ untere Zyklus h^{r+1} トノ間ニ次ノ関係ガ成立スル。

---

4) 脚註1) ノ論文参照.

$$f^r \times g_u h^{r+1} = g_o f^r \times h^{r+1}$$ 5)

但シ g_o, g_u ハソレゾレ oberer, unterer Randoperator. f^r ヲ正規変換(speziel ナ)トスレバ定義ニヨッテ左辺ハ 0. 換言スレバスベテノ $r+1$ 次元 unterer Zyklus ニ対シテ,

$$g_o f^r \times h^{r+1} = 0$$

$$\therefore \quad g_o f^r = 0$$

従ッテ f^r ハ oberer Zyklus デアル。コレニヨッテ $\overline{K}^r \to S^r$ ノ正規変換類ノツクル群 $\mathfrak{F}^r(K^n)$ ハ r 次元 obere Bettische Gruppe $B_o^r(K^n)$ ト isomorph デアルコトガワカル。従ッテ (1) ノ拡張トシテ

(2) スベテノ $r \geqq 1$ ニ対シテ $B_u^r(K^n)$ ト $\mathfrak{F}^r(K^n)$ ハ互ニ mod 1 デ charakterengruppe デアル。[6)]

ガ得ラレル。

(1) カラ特ニ次ノヨク知ラレタ結果ガ得ラレル。二ツノ連続変換 f, g : $\overline{K}^n \to S^r$ ガ homotop ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ mod 1 ノ n 次元 Zyklus ガ同ジ Grad (mod 1) デウツサレルコトデアル。コレハ直接ニハ

---

5) 脚註1) ノ論文参照.

6) H. Hopf: Eine charakterisierung der Bettischen Gruppen von Polyedern durch stetige Abbildungen, Comp. Math. 5 (1938)

又ハ位相数學第一巻第二号ノ同論文紹介参照.

rweiterungssatz ニ übertragen シテ証明デキル（Hopf ノ方法）。S^1 ノトキハ S^p ガ S^1 ヘ wesentlich ニ abbilden デキナイコトト K^n ノ 0次元 Torsion ガナイコトヲツカヘバ Hopf ノ方法デニツノ連続変換 $f, g : \overline{K^n} \longrightarrow S^1$ ガ homotop ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ $\mathfrak{g}$ ニ関スル 1次元 Zyklus ガ同ジ grad デウツサレルコトデアルコトガワカル。[7)]

(2) ニ於テ $r=1$ ノ場合ヲトレバ $\overline{K^1} \subset \overline{K^n}$ ノ S^1 ヘノ正規連続変換ハ $\overline{K^n}$ ヲデ erweitern デキルカラ $\overline{K^n} \rightarrow S^1$ ヲ考ヘレバヨイコトニナル。又上ノ注意ニヨツテ $\overline{K^1} \rightarrow S^1$ ノ同ジ正規変換ノ Erweiterung トシテ得ラレル変換ハ homotop ダカラ又 $\overline{K^n} \rightarrow S^1$ ノ同ジ変換類ニ属スル。従ツテ $K^n \rightarrow S^1$ ノ変換類ノ群ガ定義デキルコトニナル。K^n ハ 0次元ノ Torsion ガナイカラ mod 1 ノ Betti 群ノカハリニ $\mathfrak{g}$ ニ関スル Betti 群 $B^1_{\mathfrak{g}}(K^n)$ ヲトレバヨイ。ソシテ ganzzahligen charakter ヲ考ヘレバ

(3) <u>$\overline{K^n} \rightarrow S^1$ ノ変換類ノ群ハ $B^1_{\mathfrak{g}}(K^n)$ ト isomorph デアル。</u>[8)]

---

7) 詳シクハ Alexandroff-Hopf: Topologie I. Kapitel XIII ヲ見ラレタイ。

8) N. Bruschlinsky: Stetige Abbildungen und Bettische Gruppen der Dimensionszahlen 1 und 3, Math. Ann. 109. (1934)

(1) 及ビ (3) デハ$\overline{K^n}$全体ノ$\mathfrak{S}$ヘノ連続変換ヲ考ヘルカラ容易 *Kompaktum* ニマデ擴張スルコトガデキル。[9)]

Fヲn次元 *Kompaktum* トシFガn次元 *Polyeder* N_kノR_n-*adisch* ナ *Folge* デ展開サレテヰルモノトスル:

$$N_1 \leftarrow N_2 \leftarrow \cdots \leftarrow N_k \leftarrow \cdots ; \quad \pi_k^l N_l \subset N_k$$

コレニヨッテ *Betti* 群 $B(F)$ ハ $B(N_k)$[10)] ニヨッテ G_n-*adisch* ニ展開サレル:

$$B(N_1) \leftarrow B(N_2) \leftarrow \cdots \leftarrow B(N_k) \leftarrow \cdots ;$$
$$\pi_k^l B(N_l) \subset B(N_k)$$

従ッテ $F \to \mathfrak{S}$ ノ変換類ノ群ハ $B(N_k)$ ノ *Charakterengruppe* デアル $N_k \to \mathfrak{S}$ ノ変換類ノ群 $\mathfrak{F}(N_k)$[10)] ニヨッテ G_n-*al* ニ展開サレル:

$$\mathfrak{F}(N_1) \rightarrow \mathfrak{F}(N_2) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathfrak{F}(N_k) \rightarrow \cdots ;$$
$$\mathfrak{F}(N_l)\,\pi_k^l \subset \mathfrak{F}(N_k)$$

コンデ $N_k \xrightarrow{f_k} \mathfrak{S}$ ト $z_l \in B(N_l)$ ニ對シテ

$$f_k(\pi_k^l z_l) = (f_k \pi_k^l)\, z_l$$

ガ成立スルカラ *Limesgruppe* ハ又互ニ *Charakterengruppe* デアル。

---

9) $\mathfrak{S}$ ハ S^1 又ハ S^n ノイヅレカノ意味:

10) $B(N_k)$ ハ $B_{0f}^1(N_k)$ 又ハ $B_{P_1}^n(N_k)$, $\mathfrak{F}(N_k)$ ニ $N_k \to S^1$, 又ハ $N_k \to S^n$ ノ変換類ノ群ノ意味.

(1') Hopfsche Gruppe ト $B^n_{P_1}(F^n)$ ハ mod 1 デ互ニ charakterengruppe. デアル。[11]

(3') $F^n \rightarrow S^1$ ノ変換類ノ群ハ $B^1_{of}(F^n)$ ト isomorph デアル。[12]

§2. Kompaktum ノ wesentliche Abbildungen.

コノ§デハ Koeffizientenbereich ハ P_1 ノミヲ考ヘル. F ヲ Kompaktum, S^r ヲ r 次元 Sphäre トスル.

Satz F ハ有限次元ノ Kompaktum トスル. F ノ Sphäre (任意次元ノ) ヘノ Abbildung ガ wesentlich ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ konvergenter Zyklus Z (≠0) ガアッテコレガ wesentlich ニ abbilden サレルコトデアル。

証明: 充分ナコトハ明ラカダカラ必要ナコトヲ証明スレバ充分デアル。

F ノ Projektionsspektrum ヲ

$$N_1 \leftarrow N_2 \leftarrow \cdots\cdots \leftarrow N_k \leftarrow \cdots\cdots;\quad N_k = \pi^{k+1}_k(N_k)$$

N_k ノ頂点ハスベテ F ノ上ニアルモノトスル. F カラ S^r ヘノ Abbildung f ガ wesentlich トスル. f カラ induzieren サレル $N_k \xrightarrow{f_k} S^r$ ガ得ラレ, $F \xrightarrow{\pi_k} N_k$ トツヾケテ $F \xrightarrow{f_k \pi_k} S^r$ ヲ考ヘレバ k ヲ充分大キクトレバ

---

11) H. Freudenthal: Bettische Gruppe mod 1 und Hopfsche Gruppe, Comp. Math. 4 (1937)

12) 脚註 8) 参照.

$f_k \pi_k$ ハ f ト homotop ニナルカラ f ガ wesentlich ナラバ f_k モ wesentlich デアル。スベテノ k ニ對シテ f_k ハ wesentlich ト考ヘテオク。一般ニ Polyeder P ノ Sphäre ヘノ wesentlich ナ變換 f ガアレバ $Z \neq 0$ in P ガ存在シテコノ Zyklus Z ガ f ニヨッテ wesentlich ニ abbilden サレル。[13)]

從ッテ、スベテノ $N_k \xrightarrow{f_k} S^r$ ハ wesentlich ダカラスベテノ k ニ對シテ $Z_k^{s_k} \neq 0$ in N_k ガアッテ f_k ニヨッテ wesentlich ニ abbilden サレル。コノヨウニシテ Zyklus ノ列

$$Z_1^{s_1},\ Z_2^{s_2},\ \cdots\cdots,\ Z_k^{s_k},\ \cdots\cdots$$

ヲツクル。F ハ有限次元ダカラコノ中ニハ無限ニデテクル次元數 s ガアル。[14)] s 次元ノ Zyklus ダケニ注目シテ添字ヲツケカヘ s ハ省略シテ

$$Z_1,\ Z_2,\ \cdots\cdots,\ Z_k,\ \cdots\cdots$$

トカク。コノ中カラ部分列 $Z_1^{(1)}, Z_2^{(1)}, \cdots\cdots, Z_k^{(1)}, \cdots\cdots$ ヲ $\pi_1 Z_k^{(1)}$ [15)] ガ N_1 ノ algebraischer Komplex Z_1' ヘ converge スルヨウニトル。

---

13) A. Komatu und R. Sakata: Über ein Problem von Herrn Borsuk (Jap. Journ.)

14) 有限次元ノ假定ハココダケニ用ヒル。

15) π_1 又ハ π_i ハココデハ $Z_k^{(1)}$ 又ハ $Z_k^{(i)}$ ノソレゾレ Z_1, Z_i ヘノ abbildung ノ意味。

更ニコノ中カラ部分列 $z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \cdots\cdots, z_k^{(2)}, \cdots\cdots$ ヲ Z_2 ヨリ先キカラ選ンデ $\pi_2 z_k^{(2)}$ ガ N_2 ノ z_2' ヘ converge スルヤウニトッテ一般ニ $z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, \cdots\cdots, z_k^{(i)}, \cdots\cdots$ ノ中カラ Z_{i+1} ヨリ先キカラ部分列 $z_1^{(i+1)}, z_2^{(i+1)}, \cdots\cdots, z_k^{(i+1)}, \cdots\cdots$ ヲ適當ニトッテ $\pi_{i+1} z_k^{(i+1)}$ ガ N_{i+1} ノ z_{i+1}' ヘ converge スルヤウニスル。コウシテデキタ wahrer Zyklus $Z' = (z_1', z_2', \cdots\cdots, z_k', \cdots\cdots)$ ハ明ラカニ projektiver Zyklus デアル。16) z_1' ガ f_1 ニヨッテ wesentlich ニ abbilden サレルコトヲイヘバヨイ。$f_1 \pi_1 z_k^{(1)}$ ニ於テ $f_1 \pi_1$ ハスベテノ k ニ對シテ f ト homotop ト考ヘテヨイカラ wesentlich デアリ換言スレバスベテノ k ニ對シテ $\pi_1 z_k^{(1)}$ ハ f_1 ニヨッテ，從ッテ f ニヨッテ wesentlich ニ abbilden サレル。從ッテ z_1' モ f ニヨッテ wesentlich ニ abbilden サレルカラ Z' ハ f ニヨッテ wesentlich ニ abbilden サレル。

コノ特別ノ場合トシテ

<u>スベテノ Betti 群ガナイ有限次元 Kompaktum ハ如何ナル Sphäre ヘモ wesentlich ニ abbilden 出來ナイ。</u>

コトガワカル。コレハ有限次元ノ假定ガナクテモ成立スル

---

16) P. Alexandroff: Zur Homologietheorie der Kompaktum, Comp. Math. 4. (1937)

ヤウニ思ハレル。[17] コレラノ問題ト関聯シテ

"Polyeder P ノ Sphäre ノ Abbildung ニ於テ P ノ Zyklus Z ガ wesentlich ニ abbilden サレルナラバ Z ≁ 0 in P デアル"

ハ成立スルデセウカ。

---

17) K. Borsuk: Sur les transformations des polyèdres acycliques en surfaces sphériques, Fund. Math. 28, (1937), p. 210.