# 785. Banach 空間ガ regular ニナルタメノ條件

角谷　静夫（阪大）

Banach 空間 E ガ regular デアルト云フノハ．$E=\overline{\overline{E}}$ トナルコト，即チ E ノ conjugate space $\overline{E}$ デ定義サレタ任意ノ bounded linear functional $F(f)$ ガ適當ニ $x\in E$ ヲトレバ

$$F(f)=f(x) \quad \text{for all} \quad f\in\overline{E}$$

ト云フ形ニ表ハサレルコトデアル。Banach 空間ガ regular ニナルタメノ條件ハ Banach, Goldstine, Pettis, Gantmakher, Šmulian, Bourbacki, Milman 等ニヨッテ論ジラレテヰル．コレラノ人々ノ結果ハ何レモ断片的ノモノガ多ク，吾々ハ非常ニ面白クテモ，マトマッタ結果ガ出テヰナイヤウデアル。次ニ

コレラノ條件ヲ、統一的ニ論ジテ見、コレニヨツテコノ方面ノ見通シガハッキリスル様デアル。主ナ考ヘハ Banach 空間ノ weak topology ヲ使フトコロニアル[(1)]. weak topology ヲ使ヘバ形式的ニ tiansfinite ナ議論ヲ避ケ得ラレル便宜ガアル。

最初ニ以下ノ議論ニ必要ナ定義ヲ與ヘル。

Banach 空間 $E$ ニ於ケル weak topology (element トシテノ weak topology). 任意ノ $x_0 \in E$ ニ對シテ、ソノ近傍 $U(x_0; f_1 f_2, \cdots\cdots, f_n, \varepsilon)$ ハ $|f_i(x_0)-f_i(x)|<\varepsilon,\ i=1, 2, \cdots\cdots, n$ ヲ滿足スル $x \in E$ 全体トシテ定義サレル。但シ $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n \in \overline{E}$, $\varepsilon>0$ デアル。

Conjugate space $\overline{E}$ ニ於ケル weak topology (functional トシテノ weak topology). 任意ノ $f_0 \in \overline{E}$ ニ對シテ、ソノ近傍 $U(f_0; x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \varepsilon)$ ハ $|f_0(x_i)-f(x_i)|<\varepsilon,\ i=1, 2, \cdots\cdots, n$ ヲ滿足スル $f \in \overline{E}$ 全体トシテ定義サレル. 但シ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n \in E$, $\varepsilon>0$ トスル.

$\overline{E}$ ニ於テハ又 element トシテノ weak topology ガ定義サレル. 即チ任意ノ $f_0 \in \overline{E}$ ニ對シテソノ近傍 $U'(f_0; F_1 F_2, \cdots\cdots, F_n, \varepsilon)$ ヲ $|F_i(f_0)-F_i(f)|<\varepsilon,\ i=1, 2, \cdots\cdots, n$ ヲ滿足スル $f \in \overline{E}$ 全体トシテ定義スレバヨイ. 但シ $F_1, F_2, \cdots\cdots, F_n \in \overline{\overline{E}}$ デアル。

---

(1) 前々號ノ談話參照.

コノ二ツノ weak topology ハ必ズシモ一致シナイ。

$\boxed{\text{定理 1}}$ コノ二ツノ weak topology ガ一致スルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ $E$ ガ regular ナルコトデアル。

証明　十分ナコトハ明カデアルカラ必要ナコトダケ証明スル。今コノ二ツノ topology ガ一致スルトシ、任意ノ $F \in \overline{\overline{E}}$ ヲトレ。$F(f)=0$ トナル如キ $f \in \overline{E}$ 全体ノ集合ヲ $\Gamma$ トスレバ $\Gamma$ ハ $\overline{E}$ ノ部分集合デ $\overline{E}$ ノ element トシテノ weak topology デ閉ヂテヰル。ヨツテ假定ニヨリ、$\Gamma$ ハ $E$ ニ於ケル functional ト考ヘテノ weak topology デ閉ヂテヰル。

ヨツテ前々号ノ結果ヨリ $\Gamma$ ハ又 $E$ ニ於ケル functional ノ集合トシテ regularly closed デアル。故ニ任意ノ $f_0 \in E$, $f_0 \bar{\in} \Gamma$ ニ對シテ $f_0(x_0)=1$, $f(x_0)=0$ for any $f \in \Gamma$ ナル如キ $x_0 \in E$ ガ存在スル。今 $f_0$ トシテ $F(f_0)=1$ ナラシメル $f_0 \in \overline{E}$ ヲトレバ（カカル $f_0$ ハ $F \equiv 0$ デナケレバ必ズ存在スル）

任意ノ $f \in \overline{E}$ ニ対シテ $F(f-F(f)f_0)=0$．ヨツテ $f-F(f)f_0 \in \Gamma$．故ニ $x_0$ ノ定義ヨリ $f(x_0)-F(f)f_0(x_0)=0$ 然ルニ $f_0(x_0)=1$ デアツタカラ $f(x_0)=F(f)$、コレハ任意ノ $f \in \overline{E}$ ニ対シテ成立シ、且ツ $F$ ハ任意ノ $\overline{\overline{E}}$ ノ element デアツタカラ $E=\overline{\overline{E}}$、即チ $E$ ハ regular デアル。

**定理2** Banach space E ガ regular デアルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ E ガ $\overline{\overline{E}}$ ニ於テ $\overline{E}$ ニ於ケル functional トシテノ weak topology ニテ閉ヂテキルコトデアル。

証明: 必要ナコトハ明カ. 十分ナコトノ証明ヲニツ述ベル。

1° E ハ $\overline{\overline{E}}$ ノ linear subspace デアルカラ weak topology デ閉ヂテキレバ又 regularly closed デアル. (前々号ノ結果ヨリ) ヨッテモシ $F\in\overline{\overline{E}}$ ガ E ニ属シナケレバ $F(f_0)=1$, $f_0(x)=0$ for any $x\in E$ トナル。コレハ明カニ矛盾デアル。(2)

2° Helly ノ定理(3) ニヨリ任意ニ $F\in\overline{\overline{E}}$ ヲ與ヘタトキ, 任意ノ $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n \in \overline{E}$ 及ビ $\varepsilon>0$ ニ對シテ

$$F(f_i)=f_i(x),\quad i=1,2,\cdots\cdots,n;$$
$$\|x\|<\|F\|+\varepsilon$$

ナル如キ $x\in E$ ガ存在スル。コレハ F ノ如何ナル weak neighbourhood ニモ E ノ点ガ存在スルコトヲ示ス。ヨッテ若シ E ガ $\overline{\overline{E}}$ ニテ weak topology ニテ閉ヂテオレバ $F\in E$. 即チ $\overline{\overline{E}}=E$ トナラネバナラナイ。

---

(2) 即チ E ハ $\overline{E}$ ニ於ケル bounded linear functional ノ集合トシテ total デアッタノデアル。コノ証明ハ Banach: Theorie des Operations linéaries, 117 頁 remark ニヨル。

(3) 前号ノ談話参照。

Goldstineノ結果[4]ハコノ2°ト殆ンド同ジデアル。Goldstine ハEガregular ニナルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ EガS-weakly complete ナルコトデアルコトヲ証明シタ。(δ-weakly completeness ニ関シテハ私ノ位相数學第一巻第一号ノ寄書ヲ参照) Goldstine ノ δ-weakly completeness ハ結局 weakly closed ト同ジコトデアル。weak topology ヲ用ヒタ方ガヅット分リ易クナル様デアル, シカモGoldstine ハ Helly ノ定理ヲ使ハナカツタノデ証明ガ非常ニ面倒ニナツテヰル。Helly ノ定理ヲ使ヘバ殆ンド明カナコトトナツテシマフノデアル。シカシ Goldstine ガソノ証明ノ途中ニ用ヒタ考ヘ方ハナカナカ面白イ。[5]

Bourbaki[6] モ同様ナ結果ヲ述ベテヰル. Bourbaki ハ weak topology ヲ使ツテヰルガ(H. Cartan ト A. Weil ノ所謂 filtre ノ形デ). compact (實ハ

---

(4) Goldstine: Weakly complete Banach spaces, Duke Math. J. 4. (1938), 125-131.

(5) Goldstine ハ $F \in \overline{\overline{E}}$ ト任意ニ $f_1, f_2, \cdots, f_n \in \overline{E}$, $\varepsilon > 0$ ヲ與ヘタトキ $|F(f_i) - f_i(x)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $\|x\| \leqq \|F\|$ ナル如キ $x \in E$ ガ存在スルコトヲ証明シテヰル。Helly ノ定理トノ違ヒニ注意!

(6) Bourbaki: Sur les espaces de Banach, C. R. Paris, 206 (1938), Nr. 23.

bicompact）ト云フコトニ重点ヲオイテキルラシイ。(7)

実際 $\overline{\overline{E}}$ ハ $\overline{E}$ ニ於ケルアラユル linear functional ノ集合デアルカラ weak topology デハ locally bicompact ニナル.（Tychonoff ト同ジ考ヘデ）．ヨッテ $\overline{\overline{E}}$ ニ於テ閉ヂテオル E ハ又 locally bicompact ニナルノデアル。

コノ bicompactness ヲ使フト又イロイロ面白イコトガ出ル様デアル。Milman(8) ノ方法モ weak topology トニフコトハ explicit ニ云ッテナイガ、結局コノ bicompactness ヲウマク使フノデアル.

$\boxed{\text{定理 3}}$(9) Banach space E ガ separable デ且ツ locally weakly compact ナラバ E ハ regular デアル.

証明：$\overline{E}$ ニテ weakly dense ナ集合ヲ $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n, \cdots\cdots$ トセヨ。$F \in \overline{\overline{E}}$ ガ任意ニ與ヘラレタトキ Helly ノ定理ニヨリ

$$F(f_i) = f_i(x_n),\ i = 1, 2, \cdots\cdots, n;\quad \|x_n\| < \|F\| + \frac{1}{n}$$

---

(7) 詳シイ証明ガナイノデワカラナイガ。

(8) Milman: On some criteria for the regularity of spaces of type (B). C.R. URSS. 20 (1938), No. 4. 243—246.

(9) S. Banach: 189頁 Banach ノ証明ハ大ヘン面倒デアル. シカモ transfinitely closed ト云フ考ヘヲ使ッテキル。

ナル如キ $x_n \in E$ ガ存在スル. $E$ ハ locally weakly compact ナル故 $\{x_n\}$ ノ部分列 $\{x_{n_\nu}\}$ ガ存在シテ $x_{n_\nu} \to x_0 \in E$ (weakly) トナル。コノ $x_0$ ハ明カニ

$$F(f_i) = f_i(x_0), \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots$$

ヲ満足スル。次ニ

$$F(f) = f(x_0)$$

ガ任意ノ $f \in \overline{E}$ ニ對シテ成立スルコトヲ証明シヨウ。

コノタメニハ任意ノ $f_0 \in \overline{E}$ ヲ取リ $\{x_n\}$ ノ代リニ $\{x'_n\}$ ヲ

$$F(f_i) = f_i(x'_n), \ i = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n;$$

$$\|x'_n\| < \|F\| + \frac{1}{n}$$

ニヨリ定メル. ($i=0$ ヲ含メテキルコトニ注意) コノ $\{x'_n\}$ カラ部分列 $\{x'_{n_\nu}\}$ ヲエラビ $x'_{n_\nu} \to x'_0 \in E$ (weakly) ナラシメルト

$$F(f_i) = f_i(x'_0), \quad i = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots$$

トナル. ヨッテ又

$$f_i(x'_0) = f_i(x_0), \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n, \cdots\cdots$$

然ルニ $\{f_i\}$ ハ $\overline{E}$ ニテ weakly dense デアツタカラ $x_0 = x'_0$ デナケレバナラナイ。コレヨリ $F(f) = f(x_0)$ ガ任意ノ $f \in \overline{E}$ ニ對シテ成立スルコトヲ知ル。