784. Uniformly convex ナ Banach 空間ニ就イテ

角谷　静夫（阪大）

前号ニ於テ uniformly convex ナ Banach 空間ニ於テハ Mean Ergodic Theorem ガ單ニ $\|T\| \leqq 1$ ト云フ條件ノ下デ成立スルコトヲ証明シタ。コヽデ問題トナルノハコノ定理ガ吉田氏ノ定理ノ特別ノ場合トシテ得ラレナイカト云フコトデアル。吉田氏ノ定理[1]ト云フノハ次ノ定理デアル。

$\boxed{\text{定理}}$ T ヲ Banach 空間 E ニ於ケル bounded linear transformation トスル。モシ $\|T^n\| \leqq C$, $n = 1, 2, \cdots\cdots$ ナル如キ constant C ガ存在シ，且ツ任意

---

(1) 吉田氏：紙上談話會 164号，720，Banach 空間ニ於ケル Mean Ergodic Theorem.

ノ $x \in E$ ニ對シテ $x_n = \frac{1}{n}(x + Tx + \cdots + T^{n-1}x)$ $(n=1,2,\cdots)$ ガ弱收斂スル部分列ヲ含メバ、任意ノ $x \in E$ ニ對シテ $\{x_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ ハ強收斂スル。

uniformly convex ナ Banach 空間 E ニ於テ任意ノ $\|T\| \leqq 1$ ナル bounded linear transformation ニ對シテ吉田氏ノ定理ノ條件ガ滿足サレテヰルコトヲ示スニハ、uniformly convex ナ Banach 空間ガ locally weakly compact デアルコトヲ示セバ十分デアル。更ニコノタメニハ uniformly convex ナ Banach 空間ガ regular デアルコトヲ示セバ十分デアル。

何トナレバ任意ニ系列 $\{x_n\}$, $x_n \in E$, $\|x_n\| \leqq M$, $n=1,2,\cdots$ ガ與ヘラレタトキ $\{x_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ ニヨッテ張ラレタ E ノ closed linear subspace E_1 ヲ考ヘルト E_1 ハ separable デ且ツ（E ガ regular ナルコトヨリ，又ハ E_1 自身ガ uniformly convex ナルコトヨリ）E_1 ハ regular デアル. ヨッテ $\overline{E}_1$ ハ又 separable デアル。[(1a)] 故ニ $\{x_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ ヲ $\overline{E}_1$ ニ於ケル linear functional ノ（有界ナ）系列ト考ヘレバ $\overline{E}_1$ ガ separable ナルコトヨリ $\{x_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$ ノ部分列 $\{x_{n_\nu}\}$ $(\nu=1,2,\cdots)$ ガ存在シテコレガ $\overline{E}_1$ ニ於ケル linear functional ノ系列トシテ $\overline{\overline{E}}_1 = E_1$ ノ

(1a) $\overline{E}$ ガ separable ナラバ E ハ separable. ヨッテ $E_1 = \overline{\overline{E}}_1$ ガ separable ナラバ $\overline{E}_1$ ハ separable.

element x_0 ニ弱収斂スル。コレハ又 $\{x_{n_\nu}\}$ ($\nu = 1, 2, \cdots\cdots$) ガ x_0 ＝ E_1 ノ element トシテ弱収斂スルコトヲ意味スルカラ、E_1 ハ locally weakly compact デアル。

以上ノヤウナ理由ニヨツテ本回ハ $\boxed{\text{uniformly convex ナ Banach 空間ガ regular ニナルコト}}$ ヲ証明スル。

コノ事實ハ D. Milman[(2)] ニヨツテ証明サレタ。

Milman ノ証明ハ transfinitely closed ト云フ概念ヲ用ヒルモノデ、uniformly convex ナ Banach 空間ノ unit sphere ガ transfinitely closed ニナルコトヲ証明スルノガソノ方針デアル。以下ニ述ベル証明ハ Milman ノト全ク独立ニ得ラレタモノデアリ、ソノ方針モ全ク異ツテヰル。[(3)]

---

(2) D. Milman: On some criteria for the regularity of spaces of type (B), C. R. URSS. 20 (1938), No. 4. 243—246.

又 B. J. Pettis ガ Bull. Amer. Math. Soc. 44, NO. 7 ニテ同ジ結果ヲ得タト報ジテヰル。(Abstract. No. 44—7—295). コレハ Abstract ダケデアルカラ証明ノ方針ハ全然ワカラナイ。

(3) 以下ノ証明ハ transfinite ナ考ヘヲ全然用ヒナイノガソノ主眼デアル。Banach ハ transfinitely closed トイフ概念ヲ用ヒテ Banach 空間ノ regularity ヲ論ジテヰルガ、コノ考ハ全然無シニスマセル様デアル。
Banach 空間ノ議論カラ、出来ルダケ transfinite ナ (次頁ヘツヅク)

以下ノ証明ニ於テ重要ナ役割ヲ演ジルノハ Helly ノ定理デアル。[4] コノ定理ハ相當古イモノデアルケレドモ具体的ナ場合ニシカ論ジラレズ且ツソノ表現ガ explicit デナイタメニアマリ注意サレナカッタ様デアル。実際 Helly ノ定理ヲ使ヘバ Banach 空間ノ regularity ニ関スル種々ノ結果ガ非常ニ簡單ニ証明サレ、特ニ Goldstine ノ定理[5] ナドハ殆ドソノ corollary トナッテシマフノデアル。[6] コノ Helly ノ定理ノ簡單ナ証明ガ三村氏ニヨッテ得ラレタノデ次ニ先ヅコレヲ三村氏ノ才許シヲ得テ紹介スル。

。$\boxed{\text{Helly ノ定理}}$ Banach 空間 E デ定義サレタ有限個ノ linear functional $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n$, 有限個ノ real constant $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n$ 及ビ positive number M ガ與ヘラレタトキ，任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

(脚註ヲノツヾキ)

考ヘヲ除クコトハ重要ナコトヽ思ハレル・コノ方向ニ對シテハ，weak topology ガ非常ニ大切ナ役割ヲ演ジル。例ヘバ前号ノ談話 781 参照。

(4) E. Helly: über Systeme linearer gleichungen mit unendlich vielen unbekannten, Monatshefte für Math., 31 (1921), 60–91.

(5) H. H. Goldstine: Weakly complete Banach spaces, Duke Math., J. 4 (1938), 125–131.

(6) コレラノ事実ハ又別ニ稿ヲ改メテ書クコトニスル。今回ハ uniformly convex ナ Banach 空間ノ regularity ヲ証明スルノニ應用スルニ止メル。

$f_i(x)=c_i,\ i=1,2,\cdots\cdots,n,\ \|x\|<M+\varepsilon$ ヲ満足スルEノ点xガ存在スルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハ任意ノ real number ノ system $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_n$ ニ對シテ

$$|\lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\cdots\cdots+\lambda_nc_n|$$
$$\leqq M\cdot\|\lambda_1f_1+\lambda_2f_2+\cdots\cdots+\lambda_nf_n\|$$

トナルコトデアル。

$\boxed{\text{三村氏ノ証明}}$ 必要ナコトハ明カデアルカラ十分デアルコトヲ証明スル。任意ノ$x\in E$ニ對シテn次元ノEuclid空間R^nノ点$\{f_1(x),f_2(x),\cdots\cdots,f_n(x)\}$ヲ對應サセルト $x\to\{f_1(x),f_2(x),\cdots\cdots,f_n(x)\}$ ハEヲR^n内ヘ寫像スル bounded linear transformation デアル、コレヲTニテ表ス。今Eノ点xニテ$\|x\|<M+\varepsilon$ヲ満足スルモノ全体ノ集合ヲSトシSノTニヨルR^n内ノ像Kヲ考ヘルト、SガconvexナルコトヨリKモ亦convexデアル。今モシ点$P=\{c_1,c_2,\cdots\cdots,c_n\}$ガKニ属シテ居レバ定理ハ明カニ成立スル。[6a] ヨッテPガKニ属シナイトシテ矛盾ヲ出セバヨイ。PガKニ属シナイトスレバ、KガconvexナルコトヨリKノStützebeneニテPヲ通ルモノガ存在スル。即チn個ノスベテハ0デナイ常數$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_n$ヲトッテ$\{x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n\}\in K$ナルトキハ $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots\cdots+\lambda_nx_n\leqq 1$, 且ツ $\lambda_1c_1+\lambda_2c_2+\cdots\cdots+\lambda_nc_n=1$ トナル。然ルニコノ最初ノ不等式ハKノ

(6a) 即チ $f_i(x)=c_i,\ i=1,2,\cdots\cdots,\ \|x\|<M+\varepsilon$ ナル$x\in E$ガ存在スル。

定義ニモドレバ

$\|x\| < M+\varepsilon$ ナルトキ

$$\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\cdots\cdots+\lambda_n f_n(x)\leqq 1$$

ト書キ改メルコトガ出來ル。 x ガ $S(\|x\|<M+\varepsilon)$ ヲ動クトキノ $\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\cdots\cdots+\lambda_n f_n(x)$ ノ上限ハ明カニ $(M+\varepsilon)\cdot\|\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\cdots\cdots+\lambda_n f_n\|$ デアルカラ結局

$$(M+\varepsilon)\cdot\|\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\cdots\cdots+\lambda_n f_n\|\leqq 1$$
$$=\lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2+\cdots\cdots+\lambda_n c_n$$

$\varepsilon>0$ デアルカラ、コレハ定理ノ假定ニ矛盾スル。ヨッテ $p\in K$ デナケレバナラナイ。 ――以上――

Helly ノ定理ヲ *conjugate space* ノ問題ニ應用スレバ直ニ次ノ系ヲ得ル。

$\boxed{\text{系}}$ E ヲ *Banach* 空間，$\bar{E}$ ヲソノ *conjugate space*，$\bar{\bar{E}}$ ヲ更ニソノ *conjugate space* トスル。X ヲ $\bar{\bar{E}}$ ノ任意ノ *element*（即チ $X(f)$ ハ $\bar{E}$ デ定義サレタ *linear functional*）トスルトキ、任意ノ $\varepsilon>0$ 及ビ任意ノ $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\in\bar{E}$ ニ對シテ $f_i(x)=X(f_i)$，$i=1,2,\cdots\cdots,n$ ヲ満足シ且ツ $\|x\|<\|X\|+\varepsilon$ トナル如キ E ノ点 x ガ存在スル。

<u>証明</u> 任意ノ *real number* ノ *system* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n$ ニ對シテ

$$|\lambda_1 X(f_1)+\lambda_2 X(f_2)+\cdots\cdots+\lambda_n X(f_n)|$$
$$\leqq\|X\|\cdot\|\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\cdots\cdots+\lambda_n f_n\|$$

トナルコトヨリ明カ。

Uniformly convex ナ Banach 空間ガ regular ナルコトノ証明

E ヲ uniformly convex ナ Banach 空間トセヨ。任意ニ $\mathfrak{X} \in \overline{\overline{E}}$ ガ與ヘラレタトキ $f(x) = \mathfrak{X}(f)$ ガ任意ノ $f \in \overline{E}$ ニ對シテ成立スル如キ $x \in E$ ガ存在スルコトヲ示セバヨイ。$\mathfrak{X} = 0$ ナルトキハ明カデアルカラ $\|\mathfrak{X}\| > 0$ ト假定スル。ヨツテ $\|\mathfrak{X}\|^{-1}$ ヲ乘ズルコトニヨリ $\|\mathfrak{X}\| = 1$ ト假定シテモ一般性ヲ失ハナイ。

先ヅ $\|\mathfrak{X}\| = 1$ ナルコトヨリ $\|f_n\| = 1,\ \mathfrak{X}(f_n) > 1 - \frac{1}{n}$ ナル如キ $f_n \in \overline{E}$ ガ存在スル。今系列 $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n, \cdots\cdots$ ヲ考ヘル。コノウチノ最初ノ有限個 $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n$ ヲトルト、コレニ對シテ Helly ノ定理ノ系ニヨリ $x_n \in E$ ガ定マツテ

$$f_i(x_n) = \mathfrak{X}(f_i),\quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n,$$

$$\|x_n\| < \|\mathfrak{X}\| + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

トナル。

此ノ如ク定メラレタ点列 $\{x_n\}$ ガ强收斂スルコトヲ示サウ。モシ x_n ガ强收斂シナケレバアル $\varepsilon > 0$ 及ビ $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \cdots\cdots < n_k < m_k < \cdots\cdots$ ガ定マツテ $\|x_{n_k} - x_{m_k}\| \geqq \varepsilon,\ k = 1, 2, \cdots\cdots$ トナル。$\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$ デアルカラ、E ガ uniformly convex ナルコトヨリ $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \left\| \dfrac{x_{n_k} + x_{m_k}}{2} \right\| \leqq 1 - \delta(\varepsilon)$ トナル。

（$\delta(\varepsilon)$ ハ uniformly convex ノ定義[17] ニ現ハレタモノ）。然ルニ x_{n_k}, x_{m_k} （$n_k < m_k$）ハ定義ヨリ

$$f_{n_k}(x_{m_k}) = \mathbb{X}(f_{n_k}), \quad f_{n_k}(x_{n_k}) = \mathbb{X}(f_{n_k})$$

ヲ満足シ、従ッテ

$$f_{n_k}\left(\frac{x_{n_k}+x_{m_k}}{2}\right) = \mathbb{X}(f_{n_k}),$$

トナリ、コレヨリ順次

$$1-\frac{1}{n_k} < \mathbb{X}(f_{n_k}) = f_{n_k}\left(\frac{x_{n_k}+x_{m_k}}{2}\right)$$
$$\leqq \|f_{n_k}\|\cdot\left\|\frac{x_{n_k}+x_{m_k}}{2}\right\| = \left\|\frac{x_{n_k}+x_{m_k}}{2}\right\|,$$

$$\varliminf_{k\to\infty}\left\|\frac{x_{n_k}+x_{m_k}}{2}\right\| \geqq \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{n_k}\right) = 1$$

ヲ得ルカラ、コレハ矛盾デアル。ヨッテ $\{x_n\}$ ハ強収斂シナケレバナラナイ。コノ limit ヲ x_0 トセヨ。x_0 ハ明カニ

$$\|x_0\| = 1, \quad f_i(x_0) = \mathbb{X}(f_i), \quad i = 1, 2, \cdots\cdots$$

ヲ満足スル。シカモ E ガ uniformly convex ナルコトヨリカゝル $x_0 \in E$ ハ唯一ツシカ存在シナイ。[8]

---

(7) 前号ノ談話、782, 198 頁脚註参照。

(8) 何トナレバモシ x_0' （$\neq x_0$）ガ $\|x_0'\| = 1$, $f_i(x_0') = \mathbb{X}(f_i)$, $i = 1, 2, \cdots\cdots$ ヲ満足スレバ $\left\|\frac{x_0+x_0'}{2}\right\| < 1$ ニテ且ツ $f_i\left(\frac{x_0+x_0'}{2}\right) = \mathbb{X}(f_i)$, $i = 1, 2, \cdots\cdots$ トナル。

$$1-\frac{1}{i} < \mathbb{X}(f_i) = f_i\left(\frac{x_0+x_0'}{2}\right) \leqq \|f_i\|\cdot\left\|\frac{x_0+x_0'}{2}\right\| = \left\|\frac{x_0+x_0'}{2}\right\|,$$

デアルカラ $\left\|\frac{x_0+x_0'}{2}\right\| = 1$ トナラネバナラナイ。コレハ矛盾デアル。

次ニコノ x_0 ガ任意ノ $f \in \overline{E}$ ニ對シテ $f(x_0) = \mathfrak{X}(f)$ ヲ満足スルコトヲ示サウ。コレヲ示スタメニハ前ニ $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n, \cdots\cdots$ ヲ用ヒテ点列 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots$ ヲ定義シタノト全ク全様ニシテ、$f, f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n, \cdots\cdots$ ニ對シテ点列 $x'_1, x'_2, \cdots\cdots, x'_n, \cdots\cdots$ ヲ定義スレバヨイ。即チ $x'_n \in E$ ヲ

$$\|x'_n\| < 1 + \frac{1}{n}, \quad f(x'_n) = \mathfrak{X}(f),$$

$$f_i(x'_n) = \mathfrak{X}(f_i), \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

ヲ満足スルヤウニ選ベバヨイ。此ノ如クシテ定義サレタ点列 $\{x'_n\}$ ガ强收斂スルコトハ前ト全ク全様ニシテ証明サレル。且ツソノ limit x'_0 ハ明カニ

$$\|x'_0\| = 1, \quad f(x'_0) = \mathfrak{X}(f),$$

$$f_i(x'_0) = \mathfrak{X}(f_i), \quad i = 1, 2, \cdots\cdots$$

ヲ満足シテヰル。即チ x'_0 ハ先ニ得タ x_0 ノ性質ヲスベテ持ツテヰル。カヽル x_0 ハ唯一ツシカ存在シナカツタノデアルカラ $x_0 = x'_0$ デナケレバナラナイ。即チ x_0 ハ上記ノ條件ノ外ニ $f(x_0) = \mathfrak{X}(f)$ ヲ満足スル。$f \in \overline{E}$ ハ全ク任意デアツタカラ、x_0 ハ求ムルモノデアル。（証明終）

（注意）J. A. Clarkson[(9)] ハ uniformly convex ナ Banach 空間ニ於テ indefinite integral ニ關スル種々ノ結果ヲ得テヰル。

---

(9) J. A. Clarkson: Uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), no. 3. 396—414.

又 B. J. Pettis[10] 及ビ I. Gelfand[11] ハ夫々 weakly complete 及ビ regular ナ Banach 空間ニ於テ同様ノ問題ヲ論ジテヰル. 上記ノ定理ガ得ラレレバ Clarkson ノ結果ハ大部分 Pettis, Gelfand 等ノ結果ノ corollary ト考ヘラレルワケデアル。

---

(10) B.J. Pettis: On integration in vector spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938), 277–304.

(11) I. Gelfand: Zur Theorie abstrakter Funktionen, C.R. URSS, 17 (1937), no. 5. 243–245.

I. Gelfand: Operatoren und abstrakte Funktionen, C.R. URSS, 17 (1937), 245–248.